METRON

RIVISTA INTERNAZIONALE DI STATISTICA — REVUE INTERNATIONALE DE STATISTIQUE
INTERNATIONAL REVIEW OF STATISTICS — INTERNATIONALE STATISTISCHE ZEITSCHRIFT

DIRETTORE PROPRIETARIO — DIRECTEUR ET PROPRIÉTAIRE
EDITOR AND PROPRIETOR — HERAUSGEBER UND EIGENTHÜMER

Prof. Dott. Corrado Gini, *direttore dell'Istituto di Statistica della R. Università di Roma.*

COMITATO DIRETTIVO — COMITÉ DE DIRECTION
EDITORIAL COMMITTEE — DIREKTION-KOMITEE

Prof. A. Andréadès, *prof. de Science des finances à l'Université d'Athènes* (Grèce).
Prof. F. Bernstein, *Direktor des Instituts für mathematische Statistik der Universität, Göttingen* (Deutschland).
Prof. A. E. Bunge, *director general de Estadística de la Nación, Buenos Aires* (Argentina).
Prof. F. P. Cantelli, *professore di Matematica Attuariale nel R. Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali di Napoli* (Italia).
Prof. C. V. L. Charlier, *professor der Astronomie an der Universität Lund* (Schweden).
Prof. F. von Fellner, *o. off. Universitäts-Professor in Budapest* (Ungarn).
Prof. A. Flores de Lemus, *jefe de Estadística del Ministerio de Hacienda, Madrid* (España).
Prof. M. Greenwood, *professor of Epidemiology and Vital Statistics in the University of London* (England).
Ing. L. March, *directeur honoraire de la Statistique générale de la France, Paris* (France).
Prof. H. W. Methorst, *directeur de l'Office permanent de l'Institut International de Statistique et du Bureau central de Statistique, La Haye* (Pays-Bas).
Prof. A. Julin, *secrétaire général du Ministère de l'Industrie et du Travail, Bruxelles* (Belgique).
Prof. R. Pearl, *director of the Institute for Biological Research at the J. Hopkins University, Baltimore* (U. S. A.).
Prof. H. Westergaard, *professor in the University of Copenhagen* (Denmark).

AMMINISTRATORE — ADMINISTRATEUR — MANAGER — VERWALTER

Dott. Silvio Orlandi, *Istituto di Statistica della R. Università di Roma.*

SEGRETARI DI REDAZIONE — SECRÉTAIRES DE RÉDACTION
EDITORIAL SECRETARIES — REDACTIONSSECRETAERE

Prof. Luigi Galvani — Dott. Mario Saibante

Vol. IX - N. 3-4. **1-III-1932.**

SOMMARIO — SOMMAIRE — CONTENTS — INHALT

C. Gini. *Intorno alle curve di concentrazione.* . . . . . Pag. 3
G. Pietra. *Dell'interpolazione parabolica nel caso in cui entrambi i valori delle variabili sono affetti da errori accidentali* . . . . . » 77
Samuel S. Wilks. *On the distributions of statistics in samples from a normal population of two variables with matched sampling of one variable* . . . » 87
B. de Finetti. *Su la legge di probabilità degli estremi* . . . . . » 127
A. N. Sčukarev. *Ueber die Mechanik der Massenprozesse (Kollektivgegenstandlehre)* » 139
G. Cagno. *Gli studenti dell'Università di Roma attraverso il tempo dal XVI secolo ai giorni nostri* . . . . . » 153
P. Granville Edge O. B. E. *Early population records in Spain* . . . . . » 229
L. Meliadò. *Il reddito privato degli italiani nel 1928* . . . . . » 251
Bibliografia . . . . . » 323

ROMA

AMMINISTRAZIONE DEL « METRON »

R. UNIVERSITÀ — ISTITUTO DI STATISTICA

ARTICOLI GIUNTI ALLA RIVISTA CHE VERRANNO PUBBLICATI NEI PROSSIMI NUMERI.

(*Secondo l'ordine d'arrivo*)

ARTIKEL DIE AN DIE ZEITSCHRIFT ANGELANGT SIND UND WELCHE IN DEN NACHFOLGENDEN NUMMERN ERSCHEINEN WERDEN.

(*Nach der Reihenfolge des Eingangs*)

ARTICLES REÇUS PAR LA REVUE ET À PARAÎTRE PROCHAINEMENT.

(*D'après la date de réception*)

ARTICLES RECEIVED BY THE REVIEW WHICH WILL BE PUBLISHEED IN FUTURE ISSUES.

(*According to date of receipt*)

William Dowell Baten. *Frequency laws for the sum of* n *variables which are subject each to given frequency laws.*

L. Galvani. *Sulle curve di concentrazione ridotte.*

Ragnar Frisch. *On the Use of Difference Equations in the Study of Frequency Distributions.*

F. Bernstein. *Die mittleren Fehlerquadrate und Korrelationen der Potenzmomente und ihre Anwendung auf Funktionen der Potenzmomente.*

Curtis Bruen. *Five Variable Straight Line Diagram.*

V. Castellano. *Sullo scarto quadratico medio della probabilità di transvariazione.*

Gli Autori degli articoli inviati per la pubblicazione nella Rivista, rinunciano in favore della medesima alla proprietà letteraria degli articoli stessi, qualora vengano pubblicati.

The Authors of papers sent for publication in the Review are supposed to give up their copyright in favour of the Review if the papers are published.

Les Auteurs des articles envoyés à la Revue pour y être publiés, renoncent, en faveur de celle-ci, à la propriété littéraire de leurs articles, s'ils sont acceptés.

Die Verfasser der zur Veröffentlichung in der Zeitschrift zugesandten Aufsätze, werden, falls selbige veröffentlicht werden, auf ihre Verfasserrechte zu Gunsten der Zeitschrift verzichten müssen.

CORRADO GINI

Intorno alle curve di concentrazione (*)

1) La differenza media tra le quantità, che una ventina d'anni fa ho proposto come misura della variabilità dei caratteri (1), viene via via riconosciuta dagli statistici come l'indice in generale preferibile a questo scopo (2), e vengono pure ripetute e illustrate le relazioni

(*) Questa memoria fu scritta nell'ottobre 1930, a bordo del *Yasukuni Maru*, nel viaggio di ritorno dalla XIX^a Sessione dell'Istituto Internazionale di Statistica, tenutasi a Tokio dal 15 al 22 settembre 1930. Arricchita di esempi e di grafici — eseguiti sotto la direzione del Prof. L. Galvani — essa fu presentata alla XX^a Sessione dell'Istituto Internazionale di Statistica, che ebbe luogo a Madrid dal 14 al 20 settembre 1931.

Il testo qui pubblicato si differenzia, rispetto a quello presentato a Madrid, per l'aggiunta dei due ultimi paragrafi, che introducono ed applicano il concetto di *equiconcentrazione*, e per l'inserzione di parecchi nuovi esempi.

(1) *Variabilità e mutabilità*, in « Studi economico-giuridici », pubblicati per cura della Facoltà di Giurisprudenza della R. U. di Cagliari, anno III, parte II, 1912.

Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri, « Atti del R. Istituto Ven. di S. L. A. », 1913-14, t. LXXIII, parte II.

(2) Si può vedere, per esempio: W. LEXIS, recensione della Memoria *Variabilità e mutabilità* negli « Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik », Dritte Folge, Bd. XLVIII, 3. Heft; E. CZUBER, *Beitrag zur Theorie Statistischer Reihen*, Wien, 1914; G. PIETRA, *Delle relazioni tra gli indici di variabilità*, nota I e nota II, « Atti del R. Istituto Veneto di S. L. A. », 1914-15, t. LXXIV, parte II; F. SAVORGNAN, *Intorno all'approssimazione di alcuni indici della distribuzione dei redditi*, « Atti del R. Istit. Ven. di S. L. A. », LXXIV, 1914-15; G. MORTARA, *Elementi di Statistica*, Athenaeum, Roma, 1917; ed anche: *Lezioni di Statistica Metodologica*, Città di Castello, 1922; A. L. BOWLEY, *Elements of Statistics*, Fourth Edition, London, King, 1920; H. DALTON, *The measurement of the inequality of incomes*, « The Economic Journal », september, 1920; A. JULIN, *Principes de Statistique théorique et appliquée*, tome 1^er : Statistique théorique, Paris, 1921; L. AMOROSO, *Ricerche intorno alla curva dei redditi*, « Annali di Matematica pura ed applicata », serie IV, vol. II, 1925; E. J. GUMBEL, *Ein Mass der*

tra detta differenza media e le curve di concentrazione (3), relazioni che avevo posto in luce fin dal 1914.

Sembra quindi venuto il momento di ritornare sull'argomento delle curve di concentrazione, illustrandone le caratteristiche, esaminando taluni problemi che sorgono in relazione ad esse, e prospettandone altri agli statistici volonterosi.

2) Desidero anzitutto richiamare le semplici relazioni che intercedono tra le curve di concentrazione e le altre curve di distribuzione. Ho, infatti, avuto modo di constatare nella mia, ormai non breve, esperienza d'insegnante, che tali relazioni — che non ricordo di aver trovato illustrate nei trattati di statistica — riescono molto utili agli studenti per afferrare bene i problemi della variabilità e della concentrazione.

Le curve di distribuzione di un carattere si possono distinguere in tre categorie :

a) Curve di graduazione ;

b) Curve di frequenza ;

c) Curve di concentrazione.

Indichiamo con v un valore generico del carattere ; con f_v il numero delle volte in cui si presenta il valore v ; con p_v il numero delle volte in cui si presenta un valore non superiore a v ; con q_v l'ammontare complessivo del carattere nei termini in cui esso assume un valore non superiore a v, e sia $n = \Sigma f_v$ il numero totale dei valori del carattere considerato.

Se in un sistema cartesiano riportiamo sull'asse delle ascisse i valori di p_v e sull'asse delle ordinate i valori di v otteniamo una *curva di graduazione*. Se noi, per esempio, graduiamo dei coscritti per ordine crescente di statura, il profilo delle loro teste tende a descrivere una

---

Konzentration bei pekuniären Verteilungen, « Archiv für Sozialwissenschaft und Sozialpolitik », vol. 58, 1927 ; ed anche : *Das Konzentrationsmass*, « Allgem. Statist. Archiv. », 18 vol., 1928 ; L. MARCH, *Les principes de la méthode statistique*, Paris, 1930 ; L. v. BORTKIEWICZ, *Die Disparitätsmasse der Einkommens Statistik*, XIX^{me} session de l'Institut International de Statistique, Tokio, 1930; L. GALVANI, *Contributi alla determinazione degli indici di variabilità per alcuni tipi di distribuzioni*, « Metron », 1931.

(3) *Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri*, già cit. ; H. DALTON, *The measurement*, etc., già cit. ; E. J. GUMBEL, *Ein Mass der Konzentration*, etc., già cit. ; *Das Konzentrationsmass*, etc., già cit. ; L. VON BORTKIEWICZ, *Die Disparitätsmasse*, etc., già cit.

curva del tipo di quella della fig. 1, che il GALTON ha chiamato *ogiva* (4). Essa è appunto un esempio di curva di graduazione.

Ad una curva di graduazione può essere facilmente ricondotta,

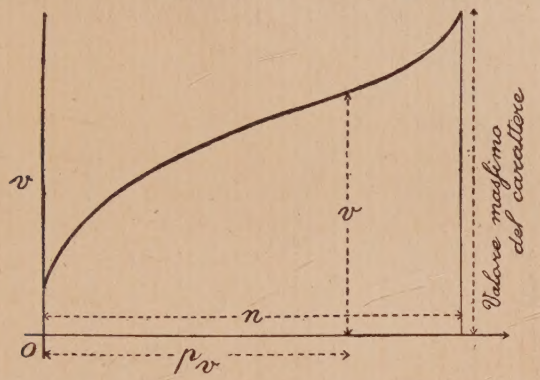


Fig. 1

girando gli assi di 90° verso sinistra, la curva paretiana dei redditi, nella quale sull'asse delle ascisse vengono rappresentati usualmente

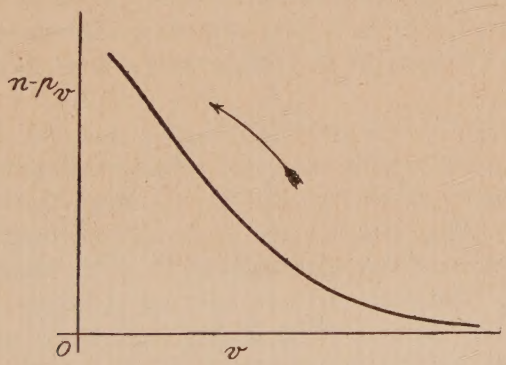


Fig. 1 bis

valori di v (reddito unitario) e sull'asse delle ordinate i valori di $n - p_v$ (censiti che posseggono un reddito unitario superiore a v) (cfr. fig. 1-*bis*).

---

(4) F. GALTON F. R. S., *Inquiries into human faculty and its development*, London, sec. edit., p. 35.

Otteniamo invece una *curva di frequenza* (fig. 2), quando riportiamo sull'asse delle ascisse i valori di v e sull'asse delle ordinate i valori di f_v.

Otteniamo infine una *curva di concentrazione* quando riportiamo

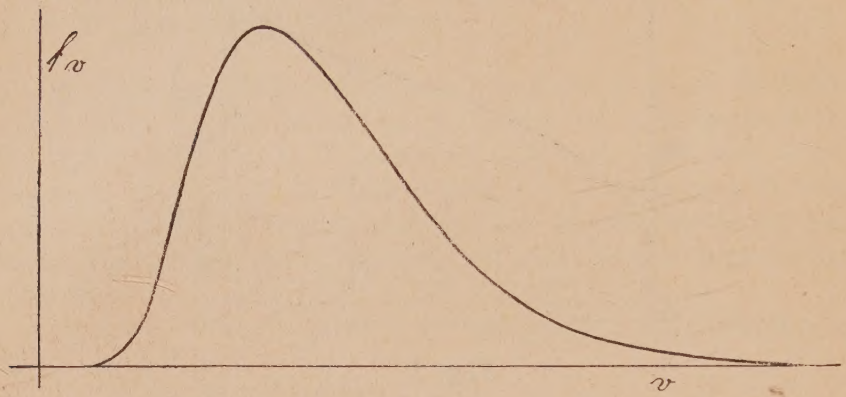


Fig. 2

sull'asse delle ascisse i valori di p_v e sull'asse delle ordinate i valori di q_v, come è indicato nella fig. 3.

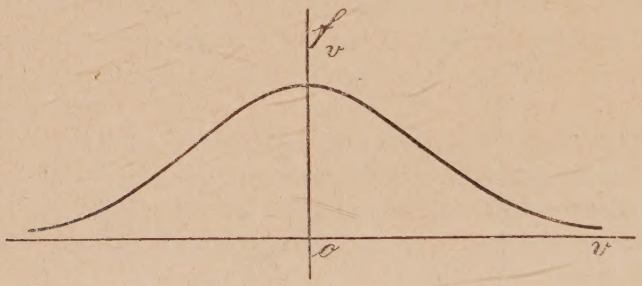


Fig. 2 bis

Potranno invece riportarsi sull'asse delle ascisse i valori di q_v e su quello delle ordinate i valori di p_v (5).

Il sistema seguìto nella fig. 3 è tuttavia preferibile ai fini di mettere in luce le relazioni tra le curve di graduazione, di frequenza e di

(5) Cfr. *Sulla misura della concentrazione*, etc., già cit., riprodotto, con taluni sviluppi, in *Memorie di Metodologia Statistica di* C. GINI, in corso di stampa. Vedi anche: U. RICCI, *L'indice di variabilità e la curva dei redditi*, Roma, 1916; L. v. BORTKIEWICZ, *Die Disparitätsmasse*, etc., già cit.

concentrazione. Si noti, infatti, che se si integra da destra a sinistra una curva di frequenza, si ottiene una curva che, girando gli assi di 90° verso sinistra, ci dà la corrispondente curva di graduazione; e che,

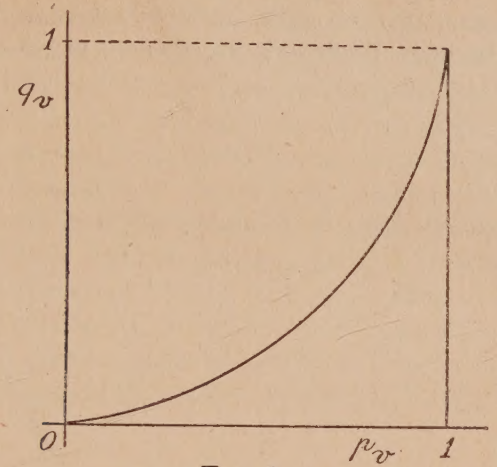


Fig. 3

se si integra successivamente da sinistra a destra la curva di graduazione così ottenuta, si perviene alla corrispondente curva di concentrazione rappresentata conformemente al sistema seguìto nella fig. 3.

La fig. 4 ci mostra graficamente le relazioni fra le tre categorie di curve.

Dal fatto che una curva di graduazione è l'integrale della corrispondente curva di frequenza segue che se una curva di frequenza è simmetrica rispetto alla sua ordinata mediana (come accade ad es. per una distribuzione normale, quale è rappresentata nella fig. 2-*bis*), la corrispondente curva di graduazione risulta simmetrica rispetto al suo punto mediano, perchè, a partire da questo punto, di tanto ordinatamente decrescono le ordinate a sinistra per quanto aumentano quelle a destra. E difatti, riferendosi alla fig. 2-*bis*:

$$\int_{-\infty}^{0-h} f_v\,dv = \int_{-\infty}^{0} f_v\,dv - \int_{h}^{0} f_v\,dv$$

$$\int_{-\infty}^{0+h} f_v\,dv = \int_{-\infty}^{0} f_v\,dv + \int_{h}^{0} f_v\,dv\,,$$

e queste sono appunto due ordinate della curva di graduazione equidistanti dal punto mediano, cosicchè gli estremi delle ordinate stesse

sono simmetrici rispetto al punto mediano della curva di graduazione, cioè al punto di ordinata $\int_{-\infty}^{o} f_v \, dv$.

Nel paragonare tra loro varie curve di frequenza, riesce spesso opportuno di eliminare l'influenza del diverso numero dei casi, fa-

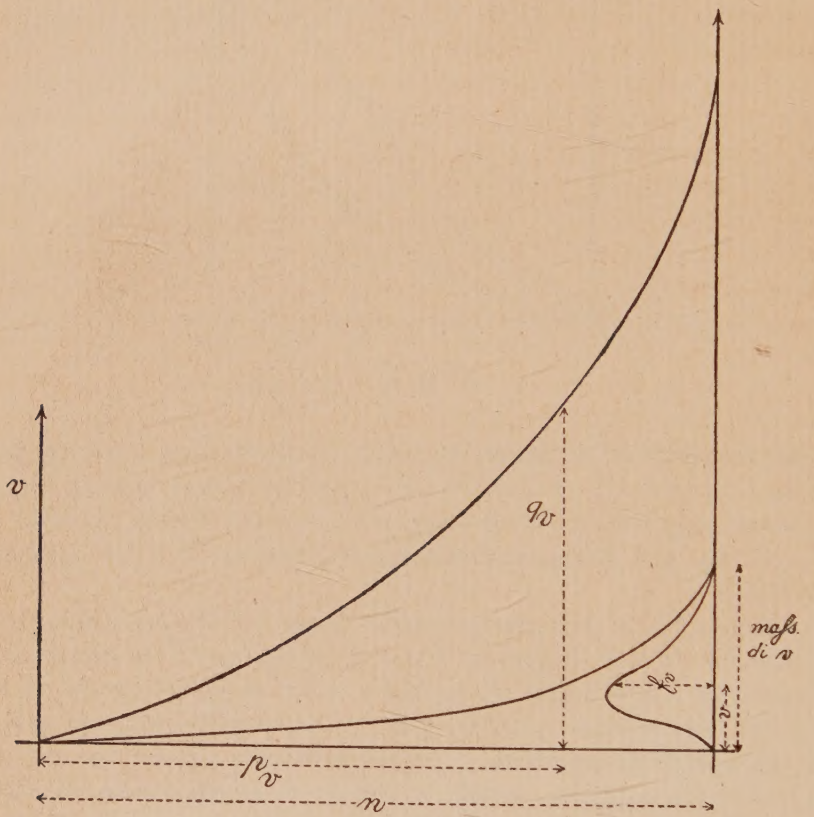


Fig. 4

cendo uguale l'area compresa fra la curva e l'asse delle ascisse. Allo stesso scopo, nel paragonare varie curve di graduazione conviene spesso rendere uguale il tratto dell'asse delle ascisse sopra cui la curva si stende, che rappresenta il numero dei casi considerati. Analogamente nel paragonare fra loro varie curve di concentrazione torna generalmente opportuno di eliminare l'influenza sia del diverso numero dei casi, sia del diverso ammontare totale del carattere, rendendo uguali

nelle varie curve, oltre che il tratto dell'asse delle ascisse, anche il tratto dell'asse delle ordinate su cui la curva si stende. Se, infine, detto tratto dell'asse delle ascisse e detto tratto dell'asse delle ordinate sono pure resi uguali tra loro, come nelle fig. 3 e 4, e ad essi viene fatto corrispondere il valore 1, i valori p_v e q_v vengono a corrispondere alle frazioni che il numero dei casi con intensità non superiore a v e l'ammontare complessivo del carattere da essi posseduto, rappresentano sul totale dei casi e sul rispettivo ammontare globale del carattere.

È ancora da osservare che per la costruzione delle curve di concentrazione non è in realtà necessario di conoscere — come è necessario nel caso delle curve di graduazione e di frequenza — i valori di v a cui corrispondono i valori di p_v o q_v ; basta conoscere i valori di q_v che corrispondono ai successivi valori di p_v, così che è opportuno di eliminare da queste notazioni la lettera v e scrivere p e q per designare rispettivamente due valori corrispondenti delle dette percentuali (6).

3) Nell'ipotesi che il carattere sia ugualmente distribuito, la curva di concentrazione diventa una retta che si chiama *retta di equi-*

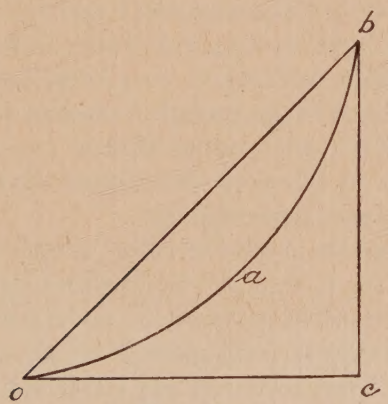


Fig. 5

distribuzione. Area di concentrazione viene chiamata la superficie compresa fra la curva di concentrazione di un dato carattere (curva *o a b* della fig. 5) e la rispettiva retta di equidistribuzione (*ob*), e *rapporto di*

(6) Ciò significa che, considerando v come un parametro da cui dipendono le coordinate p_v e q_v dei punti della curva di concentrazione, tale parametro può, almeno teoricamente, essere eliminato, di modo che le equazioni parametriche della curva di concentrazione danno luogo all'equazione $\varphi(p, q) = 0$.

concentrazione il rapporto tra l'area di concentrazione e il valore massimo rappresentato dal triangolo *ocb* che questa area può raggiungere. Ora è stato dimostrato (7) che l'area di concentrazione sta al triangolo *ocb* come la differenza media (senza ripetizione) tra le intensità del carattere sta al doppio della media aritmetica del carattere, per modo che la curva di concentrazione permette di determinare graficamente la differenza media tra i valori del carattere.

Questa determinazione indiretta assume pratica importanza quando non sono noti tutti i valori di p, o quando i valori di v sono così numerosi che ci si trova costretti a raggrupparli in classi piuttosto ampie. Il problema consiste allora nel determinare l'area di concentrazione conoscendo solo alcuni punti della curva di concentrazione.

4) Se si riuniscono con segmenti rettilinei i punti noti, si ottiene, in luogo di una vera e propria curva di concentrazione, una spezzata. Questa delimita un'area di concentrazione, la quale corrisponderebbe alla differenza media qualora tutte le intensità che rientrano in una classe fossero uguali tra loro (8).

Siccome la curva di concentrazione è convessa rispetto all'asse p, la sostituzione della detta spezzata ha l'effetto di fornire un valore approssimato per difetto dell'area di concentrazione.

L'esperienza dimostra che, quando il numero delle classi raggiunge la decina e le classi non sono troppo diverse tra loro, le approssimazioni ottenute sono già buone ; esse diventano naturalmente migliori col crescere del numero delle classi (9).

Si possono ottenere approssimazioni molto più soddisfacenti, in base all'ipotesi che le intensità di ciascuna classe, anzichè essere uguali tra loro, crescano in progressione aritmetica, ciò che porta ad introdurre nelle formule un coefficiente di integrazione di facile determinazione pratica. Facendo uso di tale coefficiente, si ottengono approssimazioni buone, anche considerando solo cinque classi (10).

---

(7) *Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri*, già cit., p. 395 nuova edizione.

(8) *Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri*, già cit., p. 368 nuova edizione.

(9) *Sulla misura della concentr. e della variab. dei caratt.*, già cit., p. 370 nuova edizione.

(10) *Sulla misura della concentr. e della variab. dei caratt.*, già cit., p. 373 nuova edizione.

Qualora si desideri una maggiore esattezza nella determinazione dell'area di concentrazione, è consigliabile di tracciare con un curvilineo una curva di concenrazione che passi per i punti noti e di misurare poi con un planimetro, o altrimenti, l'area di concentrazione così determinata (11).

Dal punto di vista pratico, la determinazione dell'area di concentrazione e quindi della differenza media, quando le quantità sono raggruppate in classi, anche ampie, o quando si conoscono sia pure pochi valori di p e q non presenta dunque alcuna difficoltà. Le osservazioni che seguono sono fatte, più che altro, perchè esse aprono la via allo studio della forma delle curve di concentrazione.

5) Il von Bortkiewicz (12) ha esaminato l'opportunità di dividere l'intervallo di variazione di q in 5 parti uguali mediante valori che nella fig. 6 sono rappresentati coi punti b^{I}, b^{II}, b^{III}, b^{IV}, b^{V} ; e, de-

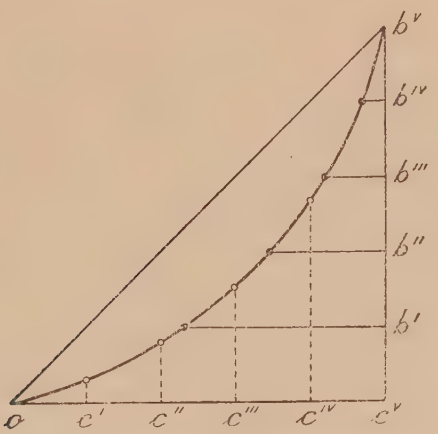


Fig. 6

terminati i punti corrispondenti ai quattro primi di questi sulla curva di concentrazione, indicati nella stessa figura con un cerchietto pieno, di calcolare l'area di concentrazione mediante la formula di quadratura di Cotes. È ovvio che tale procedimento potrebbe essere consigliabile, dal punto di vista pratico, solo quando si possedesse la classi-

(11) *Sulla misura della concentr. e della variab. dei caratt.*, già cit., p. 392 nuova edizione.

(12) *Die Disparitätsmasse*, etc., già cit.

ficazione delle intensità in cinque classi di uguale ammontare — ipotesi che nella realtà generalmente non si verifica —. Altrimenti le interpolazioni necessarie per determinare tali classi, riescono di per sè più gravose della determinazione dell'area di concentrazione per classi di ammontare disuguale. D'altra parte dette interpolazioni inevitabilmente conducono a classi solo approssimate, e introducono così nei calcoli, senza necessità, un ulteriore elemento di incertezza. Ma anche dal punto di vista teorico, il procedimento appare discutibile. Si noti, infatti, che ad intervalli uguali tra i valori di q non corrispondono affatto tratti uguali della curva di concentrazione, chè anzi, data

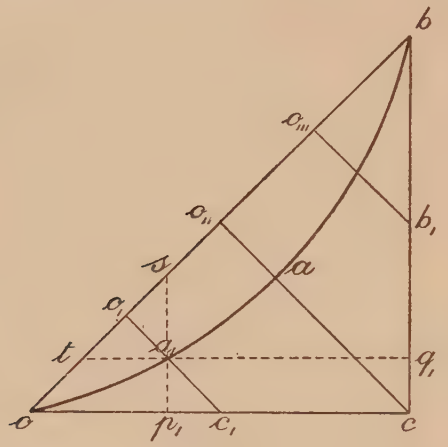


Fig. 7

la convessità che la curva di concentrazione presenta verso i lati *oc*, *cb*, avviene sempre che ai primi intervalli tra i valori di q corrispondono tratti più lunghi della curva di concentrazione. D'altra parte si consideri che si potrebbe, con uguale fondamento, considerare, anzichè valori equidistanti di q, valori equidistanti di p, rappresentati nella fig. 6 con punti c^{I}, c^{II}, c^{III}, c^{IV}, c^{V}. Ora ciò porterebbe, come risulta chiaro dalla figura stessa, a basarsi su punti della curva di concentrazione differenti da quelli considerati col procedimento precedente e distribuiti in modo sistematicamente diverso lungo la curva stessa.

È chiaro che, volendo scegliere razionalmente i punti della curva di concentrazione, da prendere in considerazione, per la determinazione dell'area di concentrazione, converrebbe considerare tratti della curva

approssimativamente uguali, quali si ottengono in pratica considerando intervalli uguali, non sull'asse delle ascisse o sull'asse delle ordinate, ma sulla retta di equidistribuzione (fig. 7). Si è così naturalmente condotti a dare alle curve di concentrazione un orientamento diverso dal consueto, portando la retta di equidistribuzione sull'asse delle ascisse, come è indicato nella fig. 8. Esaminiamo più da vicino il significato di tale rappresentazione.

6) Consideriamo, a tal fine, dapprima la fig. 7 e in essa il segmento $o_{II}c$ che biseca l'angolo ocb ed è perpendicolare ad ob nel suo punto di mezzo o_{II}.

Come è ovvio, il segmento $o_{II}c$ incontra tutte le possibili curve di concentrazione in punti per i quali è $p + q = 1$. Analogamente il seg-

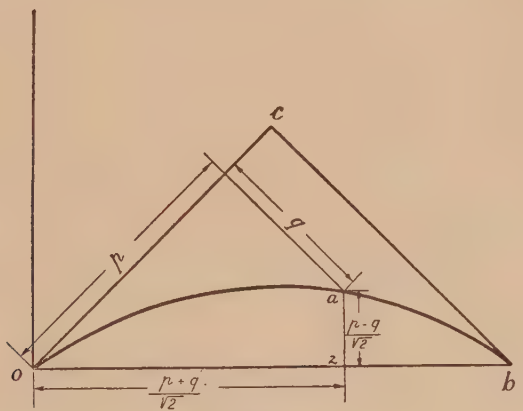


Fig. 8

mento $o_I c_I$, perpendicolare ad ob nel punto o_I che delimita il segmento $oo_I = 1/4$ della retta ob di equidistribuzione, incontra tutte le possibili curve di concentrazione in punti per i quali è $p + q = 1/2$. Similmente il segmento $o_{III}b_I$ perpendicolare ad ob nel punto o_{III} che delimita il segmento $oo_{III} = 3/4$ della retta di equidistribuzione, incontra tutte le possibili curve di concentrazione in punti per i quali è $p+q= = 3/2$. In generale, possiamo dire che una perpendicolare alla retta di equidistribuzione nel punto z (fig. 8) incontra tutte le possibili curve di concentrazione in punti per cui è $p + q = k$, k essendo uguale al doppio della frazione che la lunghezza del segmento oz rappresenta

in confronto della lunghezza totale della retta di equidistribuzione *ob*. Ma è $\overline{oc} = 1 = \overline{cb}$ e quindi $\overline{ob} = \sqrt{2}$, per modo che si può porre

$$\overline{oz} = \frac{1}{\sqrt{2}} (p + q) .$$

S'intende facilmente, d'altra parte, che la distanza del corrispondente punto della curva di concentrazione dalla retta di equidistribuzione è

$$\overline{za} = \frac{1}{\sqrt{2}} (p - q) \quad (13).$$

Possiamo dunque concludere che la rappresentazione della fig. 8 equivale a riportare sull'asse delle ascisse i valori di $\frac{1}{\sqrt{2}} (p + q)$ e sull'asse delle ordinate i valori di $\frac{1}{\sqrt{2}} (p - q)$. Poichè si può prescindere dal fattore costante $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (moltiplicazione delle dimensioni lineari della figura per $\sqrt{2}$), possiamo anche dire che la curva di concentrazione che si ottiene assumendo come asse delle ascisse la retta di equidistribuzione, esprime i valori di $p - q$ in funzione dei valori di $p + q$. I valori di $p + q$ variano allora da 0 a 2, mentre quelli di $p - q$ possono variare da 0 a 1, come risulta dalla fig. 8-*bis*.

7) Supposto che si debbano scegliere alcuni punti della curva di concentrazione per determinare l'area di concentrazione e che tale scelta sia arbitraria, si dovranno dunque preferire varî punti corrispondenti non a valori equidistanti di p, nè a valori equidistanti di q, ma a valori equidistanti di $p + q$.

Due esempi ci mostreranno le differenze che in pratica si riscontrano tra i risultati ottenuti coi tre procedimenti.

Esempio 1°:

Ricorriamo, anzitutto, ad una distribuzione fittizia, la quale si presti sia al calcolo esatto del rapporto di concentrazione, sia al calcolo approssimativo per interpolazione, in corrispondenza a valori

---

(13) Le coordinate di un punto generico della curva di concentrazione rispetto ai nuovi assi si possono anche avere immediatamente proiettando la spezzata delle coordinate p e q di tale punto su ciascuno dei nuovi assi (v. fig. 8).

equidistanti di p, a valori equidistanti di q (BORTKIEWICZ), a valori equidistanti di $\frac{p+q}{\sqrt{2}}$, ossia di $p+q$.

Supporremo, per fissare le idee, di considerare 100.000 redditieri, i cui redditi costituiscano una progressione aritmetica, per es. 1, 2, 3 . . ., 100.000.

a) L'ammontare totale del carattere (reddito globale) è

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100.000 = 5.000.050.000$$

e quindi il suo valore medio è:

$$A = 5.000.050.000 : 100.000 = 50.000,5$$

Inoltre la differenza media, senza ripetizione, del carattere è,

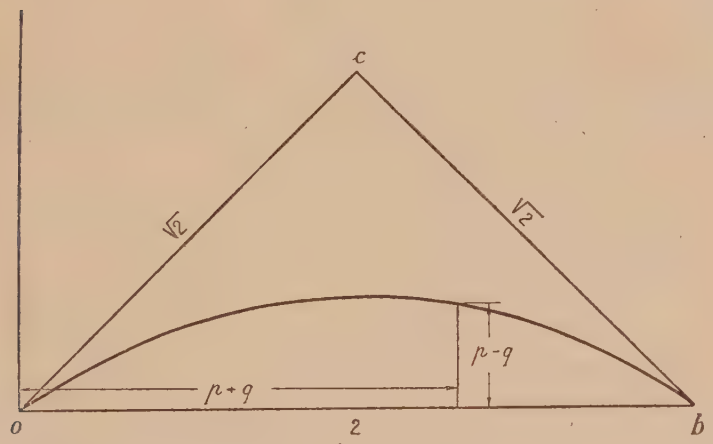


Fig. 8 bis

nella data distribuzione, che costituisce una progressione aritmetica (cfr. *Var. e Mut.*, già cit., pag. 240 nuova ediz.):

$$\Delta = \frac{n+1}{3} = \frac{100.001}{3}.$$

Se poi si ricorda che il rapporto di concentrazione equivale al quoziente fra la differenza media e il valore massimo 2A che questa può raggiungere (nell'ipotesi, qui verificata, che il carattere considerato non ammetta limite superiore), si conclude che:

$$R = \frac{\Delta}{2A} = \frac{100.001}{3 \times 100.001} = \frac{1}{3} = 0,333\ldots$$

b) Interpolazione per valori equidistanti di p (5 intervalli). Sarà $p_0 = 0$; $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}4$; $p_3 = 0{,}6$; $p_4 = 0{,}8$; $p_5 = 1$; e di più, evidentemente, $q_0 = 0$, $q_5 = 1$. Per determinare i valori di q corrispondenti agli altri valori $p_1 \ldots p_4$ di p, si noti che :

il reddito posseduto dal primo quinto dei redditieri (disposti per ordine crescente di reddito) è :

$$\frac{1 + 20.000}{2} \times 20.000 = 200.010.000$$

e pertanto

$$q_1 = \frac{200.010.000}{5.000.050.000} = 0{,}04 ;$$

similmente si trova :

$$q_2 = 0{,}16 ; \; q_3 = 0{,}36 ; \; q_4 = 0{,}64.$$

Applicando la formula di quadratura di Cotes, relativa alla divisione dell'intervallo di integrazione in cinque parti uguali, si ha (indicando con $\doteq$ l'uguaglianza approssimata) :

$$\int_0^1 q \, dp \doteq \frac{19}{288}(q_0 + q_5) + \frac{25}{96}(q_1 + q_4) + \frac{25}{144}(q_2 + q_3) =$$

$$= \frac{19 + 75(q_1 + q_4) + 50(q_2 + q_3)}{288} = \frac{96}{288} = 0{,}333 .$$

Perciò l'area di concentrazione è $0{,}500 - 0{,}333 = 0{,}167$, e quindi $R = 0{,}167 \times 2 = 0{,}334$.

c) Interpolazione per valori equidistanti di q (5 intervalli).

Sarà $q_0 = 0$; $q_1 = 0{,}2$; $q_2 = 0{,}4$; $q_3 = 0{,}6$; $q_4 = 0{,}8$; $q_5 = 1$; ed anche, per definizione, $p_0 = 0$; $p_5 = 1$. I valori di p corrispondenti agli altri 4 valori di q si avranno come segue :

Sia ξ il numero dei redditieri, disposti per ordine di reddito crescente, tale che essi posseggano insieme 1/5 dell'ammontare totale del reddito, cosicchè

$$\frac{(1 + \xi)\,\xi}{2} = \frac{5.000.050.000}{5} ,$$

ossia

$$\xi^2 + \xi - 2.000.020.000 = 0.$$

Se ne ricava la radice positiva

$$\xi = 44.721,$$

e quindi

$$p_1 = \frac{44.721}{100.000} = 0{,}447 .$$

Analogamente, indicando con η il numero dei redditieri, disposti per ordine di reddito crescente, che posseggono complessivamente 2/5 dell'ammontare totale del reddito, dovrà risultare

$$\eta^2 + \eta - 4.000.040.000 = 0$$

la cui radice positiva è $\eta = 63.246$. Perciò

$$p_2 = 0{,}632$$

e similmente

$$p_3 = 0{,}774 \; ; \; p_4 = 0{,}894.$$

Applicando, anche in questo caso, la formula di quadratura di Cotes, si trova

$$\int_0^1 p \, dq \doteq \frac{19 + 75 (p_1 + p_4) + 50 (p_2 + p_3)}{288} = 0{,}659$$

Ne segue che l'area di concentrazione è 0,659 — 0,500 = 0,159 ; e quindi

$$R = 0{,}318$$

d) Interpolazione per cinque valori equidistanti di $p + q$ (ascisse del nuovo sistema di riferimento che si è qui proposto). Evidentemente, posto $x = p + q$, $y = p - q$, x varierà da 0 a 2, ed y crescerà a partire dallo 0, raggiungerà un massimo non superiore alla unità (ed anzi uno solo per la convessità della curva di concentrazione), poi decrescerà per ritornare al valore 0.

Si tratta, anzitutto, di trovare i valori di y corrispondenti ai valori di x :

$$x_0 = p_0 + q_0 = 0 \; ; \; x_1 = p_1 + q_1 = 0{,}4 \; ; \; x_2 = 0{,}8 \; ; \; x_3 = 1{,}2 \; ;$$
$$x_4 = 1{,}6 \; ; \; x_5 = 2.$$

Intanto, sappiamo già che $y_0 = 0$ e $y_5 = 0$. Per avere gli altri valori di y si procede come viene qui esemplificato per y_1.

Se si indica con ξ il numero dei redditieri per cui deve risultare

$x_1 = p_1 + q_1 = 0{,}4$ e si tengono presenti le definizioni di p e di q, si avrà senz'altro:

$$\frac{\xi}{100.000} + \frac{(1+\xi)\,\xi}{2 \times 5.000.050.000} = 0{,}4$$

da cui

$$\xi^2 + 100.002\,\xi - 4.000.040.080 = 0$$

avente come radice positiva

$$\xi = 30.622.$$

Perciò

$$p_1 = \frac{30.622}{100.000} = 0{,}306$$

e poichè $p_1 + q_1 = 0{,}4$, così $q_1 = 0{,}094$,
donde, infine,

$$y_1 = p_1 - q_1 = 0{,}212.$$

In modo del tutto analogo si trova

$$y_2 = 0{,}249\,;\; y_3 = 0{,}208\,;\; y_4 = 0{,}120$$

La formula di Cotes dà:

$$\int_0^2 y\,dx = \frac{75\,(y_1 + y_4) + 50\,(y_2 + y_3)}{288}\,2 = 0{,}1654 + 2 = 0{,}331$$

e questo valore costituisce il doppio dell'area di concentrazione, perchè avendo sostituito $p + q$ e $p - q$ a $\frac{p+q}{\sqrt{2}}$ e $\frac{p-q}{\sqrt{2}}$, le dimensioni superficiali sono state moltiplicate per 2.

Perciò R = 0,331.

e) Si è, infine, calcolato il rapporto di concentrazione della data distribuzione per via grafica, conducendo le ordinate q corrispondenti ai punti di divisione dell'intervallo di variazione di p in 10 parti uguali e tracciando, con l'aiuto di un curvilineo, la curva di concentrazione. Si è allora trovato, facendo uso di un planimetro Amsler:

area di concentrazione = 564 unità planimetriche,
area del triangolo corrispondente alla massima concentrazione = 1717 » »

donde R = 0,328.

Paragonando i diversi risultati ottenuti, si constata che, essendo il primo trovato quello esatto, gli altri presentano, rispetto a quello, approssimazioni più o meno soddisfacenti. Lasciando da parte il valore di R avuto per via grafica, si vede che, in ordine di approssimazione decrescente, gli altri valori corrispondono ai metodi di interpolazione : (b) per valori equidistanti di p, (d) per valori equidistanti di $p + q$, (c) per valori equidistanti di q. In questo caso, almeno, il metodo proposto da Bortkiewicz (l. c.) risulta dunque il meno favorevole.

Non si può dire, naturalmente, che questi diversi sistemi abbiano in tutti i casi una efficacia decrescente, come si è verificato nell'esempio considerato. Sembra, tuttavia, di poter asserire che, almeno le forme più consuete delle statistiche tributarie, consentono di dedurre i dati necessari per l'applicazione del metodo (b) con mezzi più semplici e più esatti di quelli occorrenti alla determinazione dei dati da impiegare nel metodo (c) ; e difatti la determinazione dei k — ili è più semplice che non la determinazione di classi alle quali corrispondono valori uguali per l'ammontare globale del carattere (reddito). A ciò, forse, può attribuirsi la migliore approssimazione conseguita col metodo (b) rispetto al metodo (c). Quanto al metodo (d), esso ha un vantaggio sistematico su entrambi i precedenti, in quanto, come si è detto, esso è inspirato al concetto di dividere la curva di concentrazione in archi di lunghezza pressochè uguale ; tuttavia nella sua pratica applicazione, può presentare, in relazione ai dati disponibili, qualche maggiore complicazione di calcoli rispetto al metodo (b), e può quindi fornire un risultato meno approssimato di quello inerente al metodo (b).

Esempio 2° :

Eseguiamo una seconda applicazione, prendendo le mosse da una distribuzione effettiva, e precisamente dalla distribuzione della proprietà terriera in 30 classi, nello Stato di Victoria (1910), quale risulta dallo *Statistical Register, The State of Victoria*, 1911. Tale distribuzione, sostituendo all'estensione complessiva di ciascuna classe la corrispondente estensione media delle proprietà, è :

VICTORIA 1910 — PROPRIETÀ TERRIERA.

Estensione media delle proprietà in acri	Numero delle proprietà	Estensione media delle proprietà in acri	Numero delle proprietà
2,979	3469	957,923	1173
10,138	4420	1229,322	2583
22,249	4854	1741,474	1062
41,167	3866	2245,054	514
76,841	6696	2780,615	270
150,853	9208	3480,283	329
251,352	5422	4504,433	150
316,494	2953	6019,261	161
360,568	2951	8754,846	78
453,627	2863	12370,190	79
552,361	2212	17385,327	52
629,847	1650	25648,136	22
672,770	918	34050,800	15
756,079	1249	45087,600	5
855,691	1014	58243,000	2

a) In base a questi dati, si trova come valore della differenza media

$$\triangle = 604{,}60$$

e come valore della media aritmetica

$$A = 438{,}26$$

cosicchè

$$R = \frac{\triangle}{2A} = 0{,}690\,.$$

A questo valore del rapporto di concentrazione, calcolato per via puramente analitica, con la massima precisione consentita dai dati, potranno paragonarsi i valori di R che andremo a ricavare sia coi diversi procedimenti interpolatorî, già considerati, sia per via puramente grafica.

b) Interpolazione per valori equidistanti di p (divisione dell'intervallo di variazione di p in 5 parti uguali). Le ordinate q_1, q_2, q_3, q_4, corrispondenti ai punti di divisione intermedi sull'asse delle ascisse, sono state determinate per via grafica, cioè tracciando effettivamente

la curva di concentrazione sopra una base di 500 mm. presa come unità, e misurando le ordinate stesse con tale unità. Si è così trovato

$$q_0 = 0 \; ; \; q_1 = 0{,}005 \; ; \; q_2 = 0{,}035 \; ; \; q_3 = 0{,}116 \; ; \; q_4 = 0{,}291 \; ; \; q_5 = 1 \, .$$

Applicando la formula di Cotes si ottiene:

$$\int_0^1 q \, dp \doteq \frac{19}{288} + \frac{25}{96} \, 0{,}296 + \frac{25}{144} \, 0{,}151 = 0{,}169 \, .$$

L'area di concentrazione è, pertanto, $0{,}500 - 0{,}169 = 0{,}331$, e quindi $R = 0{,}331 \times 2 = 0{,}662$.

c) Interpolazione per valori equidistanti di q (5 intervalli). Le ordinate intermedie p_1, p_2, p_3, p_4, determinate anch'esse per via grafica, sono:

$$p_0 = 0 \; ; \; p_1 = 0{,}715 \; ; \; p_2 = 0{,}872 \; ; \; p_3 = 0{,}953 \; ; \; p_4 = 0{,}992 \; ; \; p_5 = 1,$$

da cui

$$\int_0^1 p \, dq \doteq \frac{19}{288} + \frac{25}{96} \, 1{,}707 + \frac{25}{144} \, 1{,}825 = 0{,}827 \, .$$

L'area di concentrazione è pertanto:

$$0{,}827 - 0{,}500 = 0{,}327$$

e quindi

$$R = 0{,}327 \times 2 = 0{,}654.$$

d) Interpolazione per cinque valori equidistanti di $x = p + q$ (valore dell'ascissa nel sistema di riferimento qui proposto, essendo tale ascissa variabile tra 0 e 2). Con l'impiego dell'accennato diagramma, si sono trovati come valori corrispondenti delle ordinate $y = p - q$, i seguenti:

$$y_0 = 0 \; ; \; y_1 = 0{,}342 \; ; \; y_2 = 0{,}499 \; ; \; y_3 = 0{,}489 \; ; \; y_4 = 0{,}327 \; ; \; y_5 = 0$$

Perciò:

$$\int_0^2 y \, dx \doteq \left\{ \frac{25}{96} \, 0{,}671 + \frac{25}{144} \, 0{,}988 \right\} 2 = 0{,}692$$

valore costituente il doppio dell'area di concentrazione, per il fatto che le dimensioni lineari sono state moltiplicate per $\sqrt{2}$. È dunque, senz'altro,

$$R = 0{,}692.$$

e) Infine, valendosi ancora della figura tracciata ai fini delle precedenti determinazioni, si è, per misurazione planimetrica, trovato :

area di concentrazione = 7.414 unità planimetriche.
area del triangolo di massima concentrazione. . . . . = 10.774 » »
R = 0,688.

Anche qui riesce opportuno paragonare gli ultimi quattro risultati ottenuti con quello fondamentale R = 0,690.

Si osserva che la formula di quadratura di Cotes applicata per valori equidistanti di $p + q$, e la misurazione planimetrica dell'area di concentrazione, forniscono valori di R ottimamente approssimati (a meno di due unità nella terza cifra decimale). Gli altri due risultati, e in particolare quello ottenuto per valori equidistanti di q, presentano una approssimazione assai minore.

8) Procediamo ora all'esame delle caratteristiche delle curve di concentrazione. Una caratteristica di queste curve è che la loro massima altezza possibile misurata dal segmento $\overline{cb}^{IV}$ (fig. 9), è uguale alla metà della loro base $\overline{ob}$. Questa circostanza suggerisce di ricavare un indice largamente rappresentativo di una curva di concentrazione dalla sua altezza su *ob*, ossia dalla massima delle sue ordinate (nella fig. 9 dal segmento $a^{III}\ b^{III}$).

Poichè nella totalità delle curve di concentrazione la massima altezza, in modo assoluto, può essere raggiunta solo lungo la cb^{IV}, si potrebbe anche pensare a caratterizzare la curva mediante l'altezza $a^{IV}\ b^{IV}$, che la curva di concentrazione raggiunge nel punto comune col segmento cb^{IV}, od anche mediante la lunghezza complementare ca^{IV}.

Entrambi i procedimenti possono essere giustificati con altre considerazioni. La concentrazione risulta, infatti, tanto più elevata quanto più è vasta la superficie inclusa tra la curva di concentrazione $oa^{III}\ a^{IV}b$ e la retta di equidistribuzione *ob*, ossia quanto più è ristretta la superficie compresa tra detta curva e i due lati *oc*, *cb*. Come indice approssimato della prima superficie si può appunto prendere l'ordinata massima a^{III}, b^{III} ; e come indice della seconda il segmento massimo ca^{IV} (nel senso perpendicolare ad *ob*).

Si avverta come i due procedimenti indicati corrispondano a due metodi per misurare la concentrazione dei caratteri.

Il primo corrisponde a un metodo noto : vale a dire a determinare il rapporto dello scostamento semplice medio dalla media aritmetica (${}^{I}S_A$) al suo valore massimo 2A, essendo dimostrato che tale rapporto corrisponde precisamente alla massima differenza tra p e q indicata, nella fig. 9, da $a^{III}\ b^{III}$ (14). Il secondo equivale a prendere la differenza $p - q$ corrispondente a quella coppia di valori p e q per cui sia $p + q = 1$, intendendo che la base ob della curva di concentrazione sia uguale a 2. Designeremo questa differenza con la lettera D : essa può essere pure assunta come caratteristica della curva di concentrazione e come indice di concentrazione del carattere.

Altra caratteristica della curva di concentrazione degna di attenzione è la ordinata $a^{II}\ b^{II}$, tirata sulla retta di equidistribuzione dal

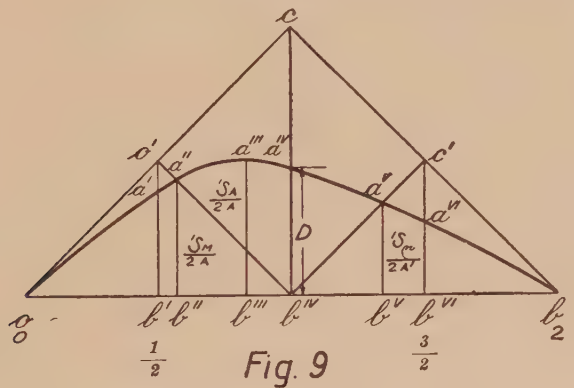


Fig. 9

punto a^{II} in cui la curva di concentrazione taglia il segmento ob^{IV} perpendicolare al lato oc nel suo punto mediano o^{I}.

Detta ordinata è misurata dallo scostamento semplice medio ${}^{I}S_M$ dalla mediana diviso per 2A (15). Anch'essa può essere considerata come un indice di concentrazione (16).

Se la distribuzione è simmetrica, A = M ; e quindi l'ordinata

---

(14) G. PIETRA, *Delle relazioni tra gli indici di variabilità, Nota I*, « Atti del R. Istituto Ven. di S. L. A. », 1914-1915, tomo LXXIV, parte II.

(15) G. PIETRA, l. c.

(16) I due citati teoremi del PIETRA esprimono che i rapporti ${}^{I}S_A : 2A$ e ${}^{I}S_M : 2A$ uguagliano le lunghezze dei segmenti paralleli a cb compresi fra a_{III} e ob, e rispettivamente tra a_{II} e ob, quando sia $oc = 1$ e quindi $ob = \sqrt{2}$. Poichè nella fig. 9 le dimensioni lineari sono moltiplicate per $\sqrt{2}$ e, in particolare, la base $ob = 2$, i detti rapporti hanno la loro effettiva rappresentazione nei segmenti $a^{III}\ b^{III}$ e $a^{II}\ b^{II}$ sopra considerati.

massima della curva di concentrazione si ha in corrispondenza alla intersezione della curva con $o^{I}\ b^{IV}$.

Dalla figura si intende come lo scostamento semplice medio dalla mediana corrisponda a valori di $p + q$ compresi tra $\frac{1}{2}$ e 1, ed abbia come valore massimo $\frac{1}{2}$. Il piede della ordinata in parola può infatti cadere, a seconda delle curve di concentrazione considerate, tra b^{I} e b^{IV}; e l'ordinata raggiunge il suo valore massimo quando coincide col segmento $o^{I}\ b^{I}$. Ci si rende conto di ciò tenendo presente che, in tal caso è, per definizione, $p = \frac{1}{2}$ e che q può assumere tutti i valori inferiori a p e quindi variare tra 0 e $\frac{1}{2}$. L'ordinata della curva in b^{I} coinciderebbe con $b^{I}\ o^{I}$, qualora il carattere avesse valore nullo nella prima metà dei termini della seriazione.

Viene, dopo ciò, spontaneo di considerare come ulteriore caratteristica della curva di concentrazione, l'ordinata $a^{V}\ b^{V}$, tirata sulla retta di equidistribuzione dal punto a^{V} in cui la curva di concentrazione incontra il segmento $c^{I}\ b^{IV}$, simmetrico al segmento $o^{I}\ b^{IV}$. S'intende subito dalla figura che tale ordinata raggiunge il valore massimo di $\frac{1}{2}$ quando coincide con $c^{I}\ b^{VI}$ e corrisponde a valori di $p + q$ compresi tra 1 e 3/2. Di ciò ci si rende conto anche tenendo presente che, in tal caso, è $q = \overline{cc}^{I}/\overline{cb} = \frac{1}{2}$, mentre p può assumere tutti i valori non inferiori a q e variare quindi tra $\frac{1}{2}$ e 1.

Perchè l'ordinata in b^{VI} raggiungesse il valore massimo $c^{I}\ b^{VI}$ sarebbe necessario che in corrispondenza al valore $p = 1$, q acquistasse non soltanto il valore 1, ma, come limite, anche il valore $\frac{1}{2}$. Ciò non può verificarsi in una distribuzione effettiva e quindi necessariamente discreta; ma rappresenta un caso limite a cui, col crescere e con l'addensarsi indefinito del numero delle osservazioni, tenderebbe una tale distribuzione quando un elemento solo possedesse metà dell'ammontare totale del carattere.

L'ordinata $a^{V}\ b^{V}$ ha, essa pure, il significato di uno scostamento medio, ed è precisamente lo *scostamento medio dalla mediana*, diviso pel doppio della media, di quella che chiameremo l'*antiserie*. Designeremo tale scostamento con ${}^{I}S_{\mu}$. Conviene aprire qui una parentesi per definire il concetto di antiserie, e illustrarne alcune conseguenze.

9) Se con v_s indichiamo l'intensità che il carattere assume in un termine di una data serie e con f_s la frequenza con cui tale intensità si presenta o il peso che ad essa si deve attribuire, diremo antiserie la nuova serie che si ottiene sostituendo ad ogni intensità v_s la sua reci-

proca $v_a = \frac{1}{v_s}$, e alla rispettiva frequenza (o peso) f_s il prodotto $f_a = f_s\, v_s$.

Le curve di frequenza di una serie e della rispettiva antiserie sono date schematicamente dalla fig. 10. In questa le ascisse di punti come a e a', b e b', etc. rappresentano valori corrispondenti del carattere nella serie e nell'antiserie, cioè valori tali che $\overline{oa} \cdot \overline{oa'} = 1$, $\overline{ob} \cdot \overline{ob'} = 1$, etc., di modo che i punti a', b', etc. sono i corrispondenti di a, b, etc. nella trasformazione per raggi vettori reciproci rispetto al cerchio di centro o e raggio 1. Quanto alle due ordinate in a e a', in b e b', etc., esse sono legate dalla relazione (ord. a') = (ord. a) . $\overline{oa}$ e dalle analoghe.

Parecchie volte l'antiserie ha un significato non solo formale.

La serie dei coefficienti di mortalità (rapporto dei morti agli abitanti) di certe circoscrizioni territoriali, in cui ad ogni coefficiente di

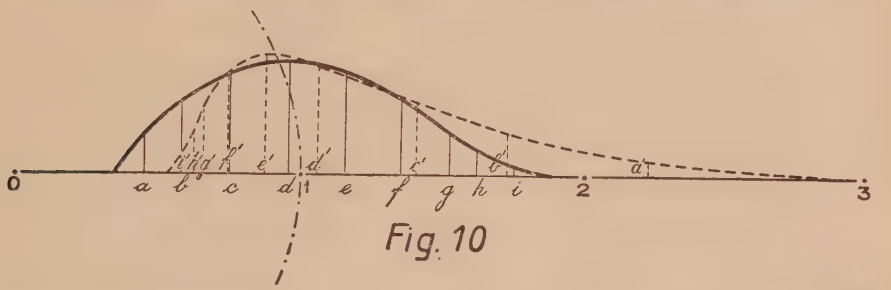


Fig. 10

mortalità si attribuisce un peso proporzionale al numero degli abitanti della circoscrizione, ha, per esempio, come antiserie la serie costituita dai rapporti degli abitanti ai morti delle stesse circoscrizioni territoriali, in cui ad ogni rapporto si attribuisce un peso proporzionale al numero dei morti della circoscrizione.

La serie dei numeri degli eredi lasciati dai singoli *de cuius*, in cui ogni numero figura con la frequenza corrispondente al numero delle successioni in cui si è presentato, ha per antiserie la serie delle quote parti in cui le singole successioni sono state divise, in cui ogni quota parte figura con una frequenza uguale al numero delle successioni moltiplicato per il relativo numero degli eredi.

Ora, tenendo presente che è $f_a = f_s\, v_s$, $f_s = f_a \frac{1}{v_s} = f_a\, v_a$ si intende subito che è

$$\frac{\Sigma f_s\, v_s}{\Sigma f_s} = 1 : \frac{\Sigma f_s}{\Sigma f_s\, v_s} = 1 : \frac{\Sigma f_a\, v_a}{\Sigma f_a},$$

la quale uguaglianza ci dice che la media aritmetica della antiserie è uguale al reciproco della media aritmetica della serie.

Questa e le altre relazioni fra una serie e la rispettiva antiserie risultano dal seguente schema, nel quale la limitazione del numero di elementi considerati, voluta per ragione di semplicità, non toglie generalità ai risultati:

	Serie	Antiserie
Valori:	$l = v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5 = \mathrm{L}$	$\frac{1}{\mathrm{L}} = \frac{1}{v_5}\ \frac{1}{v_4}\ \frac{1}{v_3}\ \frac{1}{v_2}\ \frac{1}{v_1} = \frac{1}{l}$
Frequenze:	$f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5$	$f_5 v_5\ \ f_4 v_4\ \ f_3 v_3\ \ f_2 v_2\ \ f_1 v_1$
Media aritm.:	A	$\frac{1}{\mathrm{A}}$
N° totale dei casi	$f_1 + \ldots + f_5 = n$	$f_5 v_5 + \ldots + f_1 v_1 = n\mathrm{A}$
Ammontare totale del carattere:	$n\mathrm{A}$	n

Momento incompleto di ord. 0:

$$p = \frac{f_1 + f_2}{n} \qquad p' = \frac{f_5 v_5 + f_4 v_4 + f_3 v_3}{n\mathrm{A}} = 1 - q$$

Momento incompleto di ord. 1:

$$q = \frac{f_1 v_1 + f_2 v_2}{n\,\mathrm{A}} \qquad q' = \frac{f_5 + f_4 + f_3}{\mathrm{A}} = 1 - p\,.$$

Ora, poichè rispetto agli stessi assi di riferimento (fig. 11) i punti

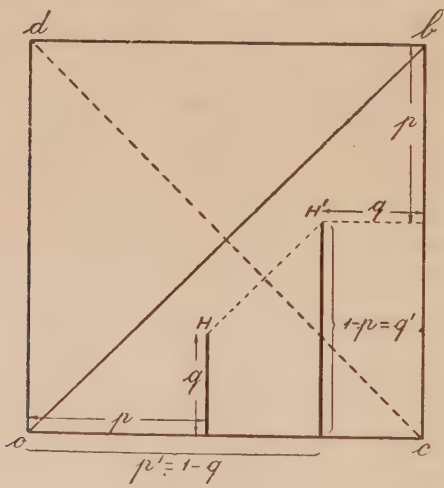


Fig. 11

H di coordinate (p, q) ed H′ di coordinate $(p' = 1 - q,\ q' = 1 - p)$ sono simmetrici rispetto alla retta cd, di equazione $p + q = 1$, si con-

clude che una serie e la rispettiva antiserie dànno luogo a curve di concentrazione simmetriche rispetto a *cd*. Nella rappresentazione, da noi adottata, le due curve di concentrazione si dispongono come è indicato nella fig. 12. Altrettanto per distribuzioni continue.

Di qui l'importante deduzione che una serie e la rispettiva antiserie hanno:

1) la stessa area di concentrazione;

2) lo stesso rapporto R di concentrazione, vale a dire lo stesso rapporto della differenza media al doppio della media aritmetica;

3) lo stesso valore massimo per la differenza $p - q$ e quindi lo stesso rapporto dello scostamento medio dalla media aritmetica al doppio della media aritmetica, nonchè la stessa differenza D (che nella nostra rappresentazione è l'ordinata della curva di concentrazione nel punto mediano di *ob*).

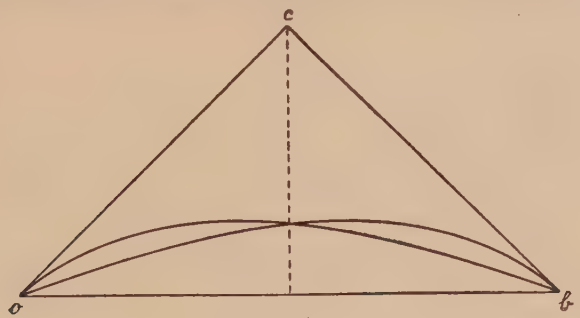


Fig. 12

Se ne deduce ulteriormente, distinguendo con l'accento i simboli che si riferiscono all'antiserie:

$$\left.\begin{aligned} R' &= \frac{\Delta'}{2A'} = \frac{\Delta' A}{2} = R \\ R &= \frac{\Delta}{2A} \end{aligned}\right\} \quad \Delta' = \frac{\Delta}{A^2}\text{; e correlativamente: } \Delta = \frac{\Delta'}{(A')^2}$$

$$\frac{{}^{I}S_A}{2A} = \frac{{}^{I}S'_A}{2A'} = \frac{{}^{I}S'_A \cdot A}{2} \text{ e quindi } {}^{I}S'_A = \frac{{}^{I}S_A}{A^2}\text{; e correlativamente: } {}^{I}S_A = \frac{{}^{I}S'_{A'}}{(A')^2}$$

cioè: la differenza media e lo scostamento semplice medio dalla media aritmetica della antiserie uguagliano la differenza media e lo scostamento semplice medio della serie, divisi per il quadrato della media aritmetica della serie.

Inoltre la considerazione dell'antiserie permette di dare una interpretazione concreta all'ordinata di quel punto a^V che la curva di concentrazione ha comune con $c^I\ b^{IV}$ (v. fig. 9), come si era accennato alla fine del n. 8. Difatti l'ordinata stessa $a^V\ b^V$, è uguale, per la segnalata simmetria, all'ordinata di quel punto che la curva di concentrazione dell'antiserie ha comune con $o^I\ b^{IV}$, e rappresenta, pertanto, il rapporto fra lo scostamento medio dalla mediana dell'antiserie e il doppio della rispettiva media aritmetica, cioè $\frac{{}^{I}S'_{M'}}{2A'}$.

Si insiste nel rilevare che una serie e la rispettiva antiserie hanno la stessa curva di concentrazione, ma invertita, i valori di $p + q$ procedendo per la serie da sinistra a destra, e per la antiserie da destra a sinistra.

Queste conclusioni mostrano come le varie misure e rappresentazioni della concentrazione risultino in sostanza le stesse per una data serie e per la rispettiva antiserie. Ciò ha importanza pratica in quanto è molte volte arbitrario misurare un fenomeno mediante un certo rapporto o mediante il suo reciproco (es. la mortalità, mediante il rapporto dei morti alla popolazione o mediante il rapporto della popolazione ai morti) ; non risponderebbe pertanto allo scopo di misurare univocamente la concentrazione o la variabilità, un indice di concentrazione o un indice di variabilità che portasse a risultati discordanti a seconda che si scelga arbitrariamente l'uno o l'altro procedimento.

10) In una memoria precedente (17) ho considerato il caso che vi sia un limite superiore per la intensità di un carattere, ed ho indicato i coefficienti di correzione da introdurre nella formula del rapporto di concentrazione, al fine di tener conto di tale circostanza.

Il coefficiente di correzione, per il quale conviene moltiplicare il doppio della media aritmetica della serie al fine di ottenere il massimo valore che la differenza media può assumere, è $\frac{L_s - A_s}{L_s}$, dove L_s rappresenta il limite superiore ed A_s la media aritmetica della serie. L'area massima di concentrazione, in tal caso, in luogo di essere rappresen-

(17) C. Gini, *Sul massimo degli indici di variabilità assoluta e sulle sue applicazioni agli indici di variabilità relativa e al rapporto di concentrazione*, « Metron », vol. VIII, n. 3, 1930.

tata dal triangolo *obc*, è costituita (fig. 13) dal triangolo *odb*, dove

$$\frac{dc}{oc} = \frac{\text{n° casi in cui il car. può avere val. } L_s}{\text{n° totale dei casi}} = \frac{\text{Amm. tot. caratt.}}{L_s} :$$

$$\frac{\text{Amm. tot. caratt.}}{A_s} = \frac{A_s}{L_s}, \text{ e quindi } \frac{odb}{ocb} = \frac{L_s - A_s}{L_s}.$$

Similmente, qualora l'intensità di un carattere ammetta un limite inferiore l_s, l'area massima di concentrazione, invece di essere rappresentata dal triangolo *obc*, è rappresentata (fig. 14) dal triangolo *oeb*,

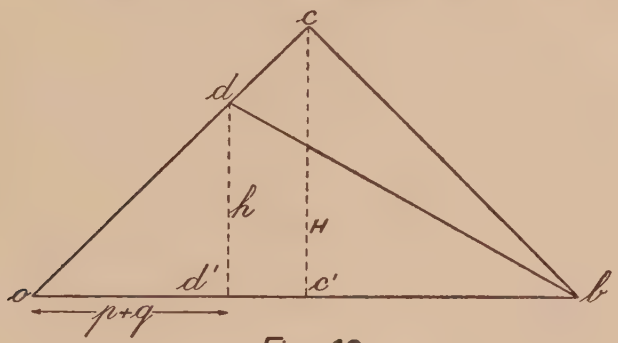


Fig. 13

dove *ce* viene a rappresentare la percentuale del carattere che risulta distribuito a tutti i termini della serie, meno l'ultimo, quando a tutti i termini stessi si attribuisca il valore l_s (e all'ultimo l'ammontare residuo) ; cosicchè $\frac{ce}{cb} = \frac{n\,l_s}{n\,A_s} = \frac{l_s}{A_s}$.

Ora si avverta come un limite superiore per la intensità della serie significhi un limite inferiore per la intensità della antiserie (V. schema al n. 9 ; per es. dire che la mortalità non può eccedere il 100 % significa che gli abitanti per 1 morto non possono discendere al disotto di 1) e poichè le intensità nei termini dell'antiserie sono le reciproche di quelle della serie, si avrà, indicando con l_a il limite inferiore e con A_a la media aritmetica dell'antiserie,

$$L_s = \frac{1}{l_a}, \; A_s = \frac{1}{A_a}$$

e quindi $$\frac{L_s - A_s}{L_s} = \frac{A_a - l_a}{A_a}.$$

D'altra parte, per quanto si è detto, il rapporto di concentrazione è uguale per una serie e per la sua antiserie; è necessario quindi che anche il coefficiente di correzione sia uguale. Se ne conclude che l'espressione $\frac{A_a - l_a}{A_a}$ indica il coefficiente di correzione (da applicarsi al doppio della media aritmetica dell'antiserie, per ottenere il valor massimo della differenza media) quando le intensità dell'antiserie ammettono un limite inferiore l_a.

Dalla figura 13 si può, d'altronde, pervenire direttamente al coefficiente correttivo $\frac{A_a - l_a}{A_a}$ considerando che lo stesso triangolo *odb* che rappresenta l'area massima di concentrazione per la serie (avente il limite superiore L_s) si può anche riguardare come costi-

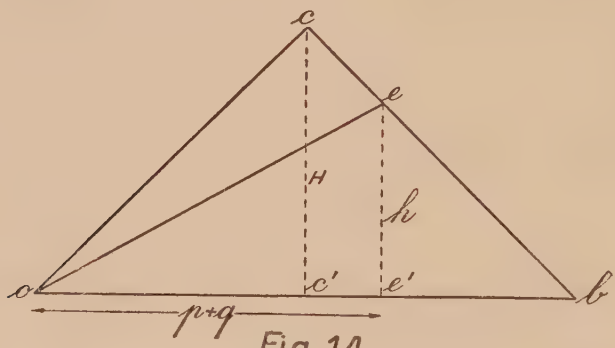


Fig. 14

tuente l'area massima di concentrazione per l'antiserie (avente il limite inferiore $l_a = \frac{1}{L_s}$) purchè (tenendo presente la figura 14) si immagini di rappresentare su *co* le percentuali dell'ammontare totale del carattere, e su *cb* le percentuali del numero totale dei termini n.

Perciò, fatto il lato *oc* uguale all'ammontare totale del carattere dell'antiserie, vale a dire ad $A_s n$ volte la media aritmetica (dove $A_s n$ indica il numero dei termini dell'antiserie) il segmento *dc* è uguale ad $A_s n$ volte il limite inferiore l_a, per modo che è

$$\frac{dc}{oc} = \frac{A_s n\, l_a}{A_s n\, A_a} = \frac{l_a}{A_a} \quad \text{e} \quad \frac{dob}{cob} = 1 - \frac{l_a}{A_a} = \frac{A_a - l_a}{A_a}.$$

Analogamente si mostra (V. fig. 14) che $\frac{A_s - l_s}{A_s}$ è il coefficiente di correzione per cui si deve moltiplicare il doppio della media aritmetica della serie, al fine di ottenere il massimo della differenza media, quando le intensità della serie ammettono un limite inferiore uguale a l_s; e che $\frac{L_a - A_a}{L_a}$ costituisce il corrispondente coefficiente di correzione per l'antiserie quando le sue intensità ammettono un limite superiore L_a.

Si noti come, nel caso che vi sia un limite inferiore l_a delle intensità, il massimo della differenza media divenga $2A_s \frac{A_s - l_s}{A_s} = 2(A_s - l_s)$. In altre parole, si ottiene, come è ovvio, lo stesso risultato che si otterrebbe sottraendo da tutte le intensità, la quantità l_s.

11) Vi sono casi in cui le intensità di un carattere ammettono ad un tempo un limite superiore ed un limite inferiore. Supponiamo di voler misurare la concentrazione delle mogli tra i maschi coniugati di una popolazione, dove la poligamia è ammessa fino ad un limite superiore di 8 mogli, 8 costituirà il limite superiore ed 1 il limite inferiore, stante che, per ipotesi, tutti i maschi considerati sono coniugati.

Per renderci conto della riduzione, che, in tali casi, subisce il massimo dell'area di concentrazione, possiamo far ricorso alla fig. 15. L'area viene in tal caso ridotta dalla superficie *obc* alla *ofb*. Possiamo scrivere: $ofb = obc - oce - efb$.

Fatta l'area $obc = 1$, è evidentemente $oce = \frac{ce}{bc}$, $efb = \frac{eb}{bc}\frac{gc}{co}$ dove gc indica l'altezza del triangolo efb, rispetto alla base eb.

Ora, da quanto si è detto, sappiamo già che è

$$\frac{ce}{bc} = \frac{l_s}{A_s} \quad , \quad \frac{eb}{bc} = \frac{A_s - l_s}{A_s} .$$

D'altra parte $\frac{gc}{oc}$ corrisponde alla frazione dei casi su cui si deve distribuire l'ammontare del carattere che rimane disponibile, e cioè $A_s n - l_s n$, nell'ipotesi di massima concentrazione, poichè ciascun

caso deve far raggiungere il limite superiore con ammontare $L_s - l_s$ in più del minimo l_s ; il numero assoluto di tali casi sarà :

$$\frac{A_s n - l_s n}{L_s - l_s} \text{ e la frazione corrispondente } \frac{A_s - l_s}{L_s - l_s} .$$

Fatto $obc = 1$, l'area ofb diviene quindi

$$1 - \frac{l_s}{A_s} - \frac{A_s - l_s}{A_s} \cdot \frac{A_s - l_s}{L_s - l_s}$$

che si riduce facilmente a

$$\frac{A_s - l_s}{A_s} \cdot \frac{L_s - A_s}{L_s - l_s} . \qquad (A)$$

Questo è il coefficiente di correzione per cui si deve moltiplicare il doppio della media aritmetica della serie, per ottenere il massimo

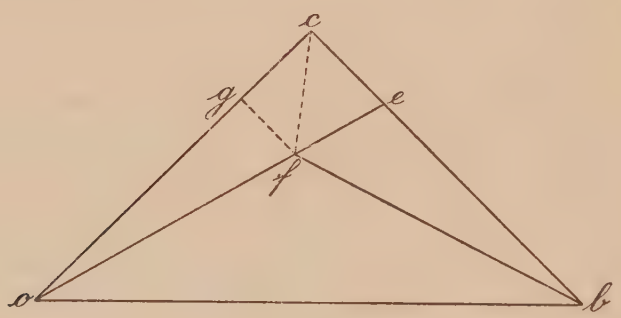


Fig. 15

che la differenza media può raggiugere quando le intensità ammettono un limite inferiore l_s e un limite superiore L_s. Se il limite inferiore non esiste, posto $l_s = 0$, si ottiene il coefficiente di correzione già noto $\frac{L_s - A_s}{A_s}$ da usarsi quando esista solo un limite superiore. Se non esiste, invece, il limite superiore, posto $L_s = \infty$, si ricade nella formula $\frac{A_s - l_s}{A_s}$ indicata nel paragrafo precedente per il caso che esista solo un limite inferiore. Se non esiste nè limite superiore, nè limite inferiore, il coefficiente di correzione diviene uguale a 1.

Si avverta che la formula vale pure per l'antiserie. Posto infatti

$$A_s = \frac{1}{A_a}, \; l_s = \frac{1}{L_a}, \; L_s = \frac{1}{l_a},$$

la formula diviene

$$\frac{\frac{1}{A_a} - \frac{1}{L_a}}{\frac{1}{A_a}} \cdot \frac{\frac{1}{l_a} - \frac{1}{A_a}}{\frac{1}{l_a} - \frac{1}{L_a}} = \frac{A_a - l_a}{A_a} \cdot \frac{L_a - A_a}{L_a - l_a}.$$

In altre parole, quando vi è un limite inferiore l_s ed un limite superiore L_s delle intensità, il massimo della differenza media, in luogo di essere $2A_s$, è

$$2\,(A_s - l_s)\,\frac{L_s - A_s}{L_s - l_s}. \qquad (B)$$

Questo risultato equivale, come è ovvio, a quello che si otterrebbe tenendo conto del solo limite superiore secondo la nota formula $2A_s\,\frac{L_s - A_s}{L_s}$, qualora da ogni intensità e conseguentemente dalla media e dal limite superiore si sottraesse la quantità l_s.

12) Se la formula (B) è valida per il massimo della differenza media di un carattere, dobbiamo domandarci quale coefficiente correttivo sia da applicare al massimo della differenza media del carattere complementare, in quanto la concentrazione di due caratteri complementari deve logicamente risultare la stessa, affinchè l'indice possa riguardarsi come soddisfacente.

Deve osservarsi, a questo proposito, che se l'intensità del carattere complementare viene misurata a partire dal limite superiore L_s, allora il carattere complementare presenta il limite inferiore 0, il che è quanto dire che non presenta un limite inferiore e si applica ad esso il coefficiente di correzione già noto, col quale si perviene appunto, come è facile riscontrare, allo stesso rapporto di concentrazione che applicando la formula (B) al carattere originario, che ammette il limite inferiore l_s ed il limite superiore L_s.

Difatti, per il carattere fondamentale vale la (B); passando al carattere complementare la media sarà:

$$A_c = L_s - A_s \qquad (1)$$

ed il limite superiore sarà

$$L_c = L_s - l_s \qquad (2)$$

mentre il suo limite inferiore l_c sarà $L_s - L_s = 0$. (3)

Esprimendo i termini della (B) mediante le (1), (2), (3), si ottiene appunto:

$$2\,\frac{(L_c - A_c)\,A_c}{L_c}$$

cioè si passa al coefficiente di correzione da applicare alla media aritmetica A_c del carattere complementare, tenendo conto del fatto che esso ha il solo limite superiore L_c.

Se invece il carattere complementare si misura a partire da una grandezza $K > L$, allora anche le intensità complementari ammettono un limite inferiore. Pertanto è

$$A_c = K - A_s$$
$$L_c = K - l_s$$
$$l_c = K - L_s$$

in base ai quali, dalla (B), si ottiene ancora:

$$2\,\frac{(L_c - A_c)\,(A_c - l_c)}{L_c - l_c}$$

cioè il coefficiente di correzione per il carattere complementare è della stessa forma che per il carattere fondamentale.

13) Possiamo ora riprendere il filo interrotto alla fine del paragrafo 8.

Quando esiste un limite superiore oppure un limite inferiore nelle intensità della serie, il massimo valore possibile della differenza $p - q$ non corrisponde più al valore di $p + q = 1$. Nel primo caso (V. fig. 13) tale massimo può soltanto verificarsi in corrispondenza ad un valore di $p + q$ inferiore ad 1 e precisamente uguale a quella frazione

$$\frac{od'}{oc'} = \frac{od}{oc} = \frac{L - A}{L}$$

dei casi in cui può presentarsi il valore 0; ed il massimo stesso può essere $L = \dfrac{L - A}{L}$.

Nel secondo caso (fig. 14) il massimo in parola corrisponde a un valore di $p + q$ superiore ad 1. Tale valore di $p + q$ supera precisamente l'unità della frazione

$$\frac{c'e'}{c'b'} = \frac{ce}{cb} = \frac{l}{A},$$

che rappresenta la frazione dell'ammontare che viene resa indispensabile dal fatto che tutti i casi devono possedere almeno l'intensità minima l; il valore del massimo può essere $L_1 = \frac{A - l}{A}$.

Quando, infine, esiste ad un tempo e un limite superiore L_1 ed un limite inferiore l, il massimo valore possibile della differenza $p - q$ si

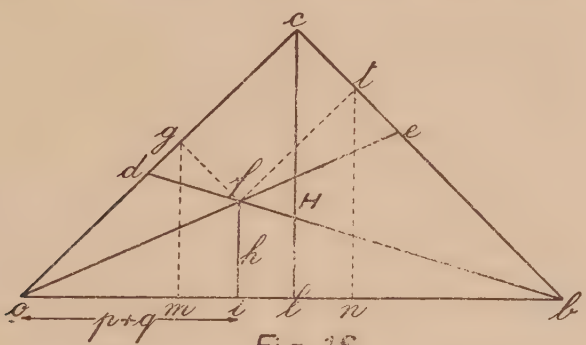


Fig. 16

può avere in corrispondenza ad un valore di $p + q$ superiore, uguale o inferiore alla unità. Esso corrisponde precisamente al valore di

$$p + q = 1 - \frac{A - l}{L_1 - l} + \frac{L_1 - A}{L_1 - l} \cdot \frac{l}{A} = \frac{L_1 - A}{L_1 - l} \frac{A + l}{A};$$

e il valore del massimo può essere $L_1 = \frac{L_1 - A}{L_1 - l} \frac{A - l}{A}$ (18).

---

(18) Per rendersene conto si tenga presente la figura 16:
Si osserva che è $oi = ol - ml + mi$ ossia $oi = ol - in + ln$. Ora, ricordando che è, per costruzione, $ol = 1 = lb$, appare subito che è

$$mi = ln = \frac{ct}{bc} \qquad ml = in = \frac{gc}{bo}.$$

Nel confrontare tra loro varie curve di concentrazione, può tuttavia essere consigliabile di ridurre a quantità costante le massime aree che le curve di concentrazione possono contenere, a seconda che il carattere non ammette un limite nè superiore nè inferiore, ammette un limite superiore, ammette un limite inferiore, ammette un limite superiore e un limite inferiore, vale a dire le aree dei triangoli *obc*, *odb* (fig. 13), *oeb* (fig. 14), *ofb* (fig. 15).

Chiameremo curve di concentrazione *ridotte* le curve di concentrazione soddisfacenti alla detta condizione. A favore di questo procedimento, che avrà per effetto di far corrispondere in ogni caso al valore di $p + q = 1$ la massima possibile differenza $p - q$, possono portarsi considerazioni diverse.

Da una parte, infatti, può osservarsi che, affinchè varie curve di concentrazione siano tra loro paragonabili, è necessario che possano muoversi entro la stessa area e raggiungere gli stessi limiti. D'altra parte, conviene tener presente che, quando le intensità di un carattere ammettano un limite inferiore, anzichè considerare le intensità osservate e restringere convenientemente il massimo dell'area di concentrazione, si può sottrarre dalle intensità osservate il limite inferiore e calcolare la concentrazione delle intensità così ridotte senza restringere il massimo dell'area di concentrazione. Il rapporto di concentrazione, come fu osservato (cfr. parag. 11), risulta identico nei due casi. Ora è ovviamente conveniente che anche le curve di concentrazione risultino uguali. Il limite inferiore per le intensità di un carattere corrisponde, d'altronde, ai limiti superiori del carattere inverso e del complementare, ed è opportuno adottare un procedimento che escluda la possibilità che le loro curve di concentrazione possano risultare diverse da quella del carattere originario.

Vediamo, su alcuni esempi, come si possano costruire le curve di concentrazione ridotte, in corrispondenza ai diversi casi possibili. Se non esistono limiti, nè inferiore, nè superiore, la curva risulta senza

---

D'altra parte, tenendo presenti le considerazioni fatte al paragrafo 11, si intende facilmente che è

$$\frac{gc}{co} = \frac{\dfrac{An - ln}{L - l}}{n} = \frac{A - l}{L - l}$$

e analogamente

$$\frac{bH}{bc} = n\left(1 - \frac{A - l}{L - l}\right)\frac{l}{An} = \frac{L - A}{L - l}\,\frac{l}{A}$$

altro riferita al solito triangolo rettangolo, e quindi è, di per sè stessa, una curva ridotta. Perciò i casi di effettiva riduzione da esaminare sono :

a) il carattere v che dà luogo alla seriazione ammette un limite superiore L, ed un limite inferiore l ;

b) il carattere v ammette soltanto un limite inferiore l ;

c) il carattere v ammette soltanto un limite superiore L.

Esempio 1° (caso *a*) :

Sia data la distribuzione

v	f_v	
15 |— 25	8	
25 |— 35	11	
35 |— 45	12	$n = 132$
45 |— 55	30	$A = 55{,}68$
55 |— 65	35	
65 |— 75	16	
75 |— 85	14	
85 |— 95	6	

in cui si supponga $l = 15$, $L = 95$.

Ammettendo che in ogni classe il carattere v abbia un valore costante ed uguale alla media aritmetica dei valori estremi, si ottiene

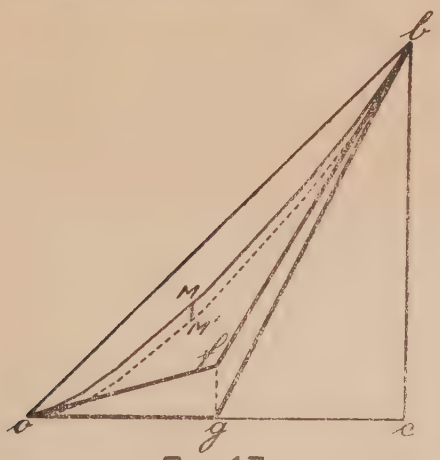


Fig. 17.

la curva (spezzata) di concentrazione rappresentata in linea piena nella fig. 17 e passante per M. Il triangolo di massima concentrazione

è rappresentato da *ofb*, dove le coordinate di f ($p = 0{,}492$, $q = 0{,}133$) si determinano in corrispondenza a quel certo numero ξ di termini per cui sia $15\,\xi + 95\,(132 - \xi) = 132\,A$ (distribuzione di massima concentrazione).

Sottraendo dal valore dei termini della data serie la costante $l = 15$, si avrà una nuova serie, per la quale sarà $l' = 0$ e che sarà dotata dello stesso rapporto di concentrazione. La nuova curva (spezzata) di concentrazione, passante per M′, è nella stessa figura segnata in linea tratteggiata, ed essa va riferita al triangolo di massima concentrazione *ogb*, in cui le coordinate del punto g sono $p = 0{,}507$, $q = 0$. I vertici f e g dei due triangoli di concentrazione massima *ofb*, *ogb*

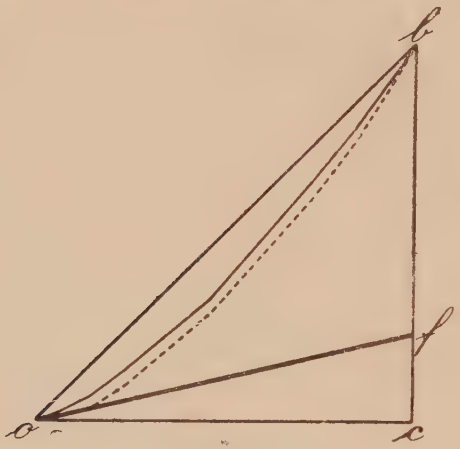


Fig. 18

cadono praticamente sulla stessa parallela a *cb* (e vi cadrebbero esattamente se la distribuzione iniziale fosse continua).

Questo esempio dimostra come dal caso di esistenza di limite superiore e limite inferiore, si possa passare a quello di esistenza di solo limite superiore.

Esempio 2° (caso *b*) :

Sia data la distribuzione stessa dell'esempio precedente, ma questa volta si supponga l'esistenza del solo limite inferiore $l = 15$, di modo che $L = \infty$. Ammettendo, anche qui, che in ogni classe il carattere v abbia un valore costante, ed uguale alla media aritmetica degli estremi, si otterrà come curva di concentrazione quella stessa del caso precedente, riprodotta in linea piena nella fig. 18. Questa volta, però,

il triangolo di massima concentrazione sarà *ofb*, in cui il vertice *f* ha le coordinate $p = 1$, $q = 0{,}234$ determinate nella supposizione che nei 132 termini della seriazione il carattere assuma il valore minimo 15, e quindi globalmente il valore 1.980, che corrisponde appunto a 0,234 dell'ammontare totale del carattere.

Sottraendo dal valore dei termini della data serie la costante $l = 15$ si otterrà una nuova serie, priva di limiti, ma dotata dello stesso rapporto di concentrazione. La corrispondente curva di con-

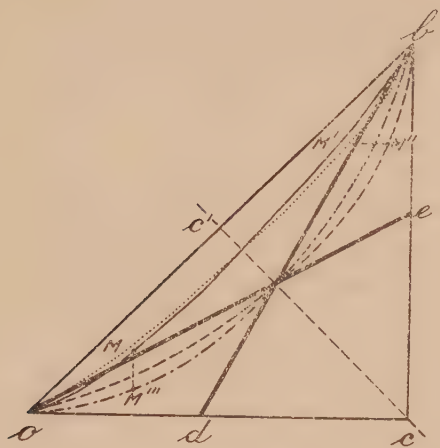


Fig. 19

centrazione, segnata in linea tratteggiata, va riferita al triangolo di massima concentrazione, che risulta essere l'intero triangolo *ocb*.

Questo esempio dimostra come dal caso di esistenza di solo limite inferiore si possa passare a quello in cui non esiste nè limite inferiore, nè limite superiore.

Esempio 3° (caso *c*) :

Sia data ancora la distribuzione del primo esempio, nella quale peraltro si supponga $l = 0$, $L = 95$, cioè l'esistenza di solo limite superiore. Nella solita ammissione che in ogni classe il carattere *v* abbia un valore uguale alla media aritmetica degli estremi, si ottiene come curva di concentrazione quella dei due esempi precedenti, rappresentata in linea piena nella fig. 19 ; ma tale curva deve intendersi riferita al triangolo di massima concentrazione *odb*, nel quale il vertice *d*, ottenuto nella supposizione che il valore L venga attribuito al maggior

numero possibile di termini, ha le coordinate $p = 0{,}411$ e $q = 0$. È, difatti, $\frac{dc}{oc} = \frac{A}{L} = 0{,}589 = 1 - 0{,}411$.

Per ottenere la corrispondente curva di concentrazione ridotta, cioè quella inerente alla supposizione che il carattere possa variare tra 0 e ∞, e che pertanto l'area di massima concentrazione sia rappresentata dall'intero triangolo fondamentale *ocb*, si potrà utilizzare il concetto di antiserie. Basterà, difatti, 1°) considerare l'antiserie della serie data, e per essa il valore del carattere potrà variare fra $l' = \frac{1}{L} = \frac{1}{95}$ ed $L' = \infty$; 2°) passare da questa antiserie ad una nuova serie ausiliaria, in cui il carattere possa variare fra i limiti $l'' = 1/95 - 1/95 = 0$ e $L'' = \infty$, con procedimento analogo a quello del secondo esempio ; 3°) passare da questa seconda serie ausiliaria alla sua antiserie, per la quale il valore del carattere potrà dunque estendersi fra $l''' = 0$ ed $L''' = \infty$; quest'ultima antiserie darà luogo ad una curva di concentrazione che è quella cercata.

Per eseguire questi successivi passaggi si ricordi, anzitutto (cfr. n. 9), che una serie e la rispettiva antiserie dànno luogo a curve di concentrazione simmetriche rispetto all'asse *cc'* ; nella fig. 19 la curva di concentrazione dell'antiserie è segnata in linea punteggiata, e il rispettivo triangolo di massima concentrazione è *oeb*. La sostituzione del limite inferiore $l'' = 0$ al limite $l' = 1/95$ dà luogo a una serie di cui la curva di concentrazione è segnata a trattini. Infine l'antiserie di questa serie avrà come curva di concentrazione la simmetrica della precedente rispetto all'asse *cc'*. La figura stessa contiene questa nuova curva segnata a punto e linea, e indica in M', M'', M''' i punti via via corrispondenti, nei successivi passaggi, ad un punto generico M della prima curva di concentrazione (19).

14) Si può pensare a interpolare la curva di concentrazione anzichè mediante i punti corrispondenti a punti equidistanti della retta di equidistribuzione (cfr. paragr. 5 e 7), mediante tutti o alcuni dei punti corrispondenti alle caratteristiche della curva, considerate al paragrafo 8 : scostamento semplice medio dalla media aritmetica

(19) Per la trattazione generale del problema di passaggio da una curva di concentrazione alla corrispondente curva ridotta, nel caso di distribuzioni continue, si potrà vedere L. GALVANI, *Sulle curve di concentrazione ridotte*, di prossima pubblicazione.

($^{I}S_A$) ; differenza $p - q$ sulla possibile ordinata massima (D) ; scostamento semplice medio dalla mediana della serie ($^{I}S_M$) ; scostamento semplice medio dalla mediana dell'antiserie ($^{I}S_\mu$).

Ai fini di tale determinazione occorrerà, naturalmente, conoscere in tal caso, oltre i valori suddetti anche i corrispondenti valori di p e di q, ciò che per $^{I}S_M$ e $^{I}S_\mu$ è dato per definizione ; per D si ricava immediatamente dalla quantità $p - q$ determinata e da quella $p + q$ nota per costruzione, e per $^{I}S_A$, infine, si determina facilmente sulla base del numero dei casi con intensità inferiore alla media. Per le stesse serie considerate al paragr. 7 abbiamo, nei seguenti tre esempi, eseguito la interpolazione della curva supponendo note le quattro caratteristiche $^{I}S_A$, D, $^{I}S_M$, $^{I}S_\mu$, oppure le sole tre $^{I}S_A$, $^{I}S_M$, $^{I}S_\mu$.

Esempio I° :

Nella solita distribuzione di $n = 100.000$ redditieri, dotati rispettivamente dei redditi 1, 2, ... 100.000, abbiamo già veduto essere la media aritmetica A = 50.000,5 ; ed è pure la mediana M = 50.000,5. Perciò, in questo esempio (curva di frequenza simmetrica), due delle quattro caratteristiche della curva di concentrazione vengono a coincidere, e si ha :

$$^{I}S_A = {}^{I}S_M = \frac{2\,(0{,}5 + 1{,}5 + \ldots + 49999{,}5)}{100.000} = 25.000$$

$$\frac{^{I}S_A}{2A} = \frac{^{I}S_M}{2A} = 0{,}250.$$

Per calcolare la terza caratteristica $^{I}S_\mu : 2A'$, dove μ e A' denotano la mediana e la media aritmetica dell'antiserie, notiamo che questa antiserie sarà così costituita :

Valori del carattere :	$\frac{1}{100.000}$	...	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
frequenze :	100.000	...	3	2	1.

La media aritmetica del carattere nell'antiserie sarà, per quanto sappiamo,

$$A' = \frac{1}{A} = \frac{1}{50.000{,}5}.$$

Quanto alla sua mediana μ, poichè il numero dei termini è $n' = An = 5.000.050.000$, si concluderà che il termine di posto $n' : 2$ appartiene a quella classe di frequenza z per cui

$$1 + 2 + \ldots + z = 2.500.025.000,$$

cioè

$$z^2 + z - 5.000.050.000 = 0$$

che fornisce come radice positiva

$$z = 70.710{,}53$$

a cui corrisponde il reddito mediano

$$\mu = \frac{1}{70710{,}5}.$$

Si tratta ora di determinare per l'antiserie lo scostamento ${}^{1}S_{\mu}$ dalla mediana.

La somma degli scostamenti di μ dai valori inferiori è

$$T_1 = \sum_{n=70711}^{100.000} n\left(\mu - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=70711}^{100.000} (n\mu - 1) = \mu \sum_{n=70711}^{100.090} n - 29290 =$$

$$= \frac{1}{70710{,}5} \frac{170711 \times 29290}{2} - 29290 = 6.066.$$

La somma degli scostamenti di μ dai valori superiori è

$$T_2 = \sum_{n=1}^{70710} n\left(\frac{1}{n} - \mu\right) = \sum_{n=1}^{70710} (1 - n\mu) = 70710 - \mu \sum_{n=1}^{70710} n =$$

$$= 70710 - \frac{1}{70710{,}5} \cdot \frac{70711 \times 70710}{2} = 35.355.$$

Perciò

$${}^{1}S_{\mu} = \frac{T_1 + T_2}{5.000.050.000} = \frac{41.421}{5.000.050.000},$$

ed

$$\frac{{}^{1}S_{\mu}}{2A'} = \frac{41.421}{5.000.050.000} \cdot \frac{50.000{,}5}{2} = 0{,}207.$$

Infine la quarta caratteristica, D, non sarà altro che il valore $p_t - q_t$ corrispondente a $p_t + q_t = 1$.

È facile determinare il valore di x a cui corrispondono valori p_t e q_t soddisfacenti a quest'ultima condizione.

È, difatti, per definizione,

$$p_t = \frac{t}{100.000}; \quad q_t = \frac{1 + 2 + \ldots + t}{1 + 2 + \ldots + 100.000} = \frac{t^2 + t}{10.000.100.000},$$

donde si ricava in modo ovvio

$$t = 61803{,}29$$

cosicchè

$$p_t = 0{,}618 \qquad q_t = 0{,}382$$

e infine

$$D = p_t - q_t = 0{,}236.$$

Concludendo, si hanno come quantità caratteristiche della curva di concentrazione della data distribuzione i seguenti valori di $p - q$:

$$\frac{{}^{I}S_M}{2A} = 0{,}250\ ;\ \frac{{}^{I}S_A}{2A} = 0{,}250\ ;\ D = 0{,}236\ ;\ \frac{{}^{I}S_\mu}{2A'} = 0{,}207\ ,$$

corrispondenti nel sistema di riferimento da noi adottato, a valori di $p + q$ che indicheremo con

$$p_I + q_I,\ p_{II} + q_{II},\ 1,\ p_{III} + q_{III},$$

e che è pure facile determinare.

Infatti, essendo $p_I = 0{,}500$ e $p_I - q_I = 0{,}250$, si trae $q_I = 0{,}250$, cosicchè

$$p_I + q_I = 0{,}750.$$

Quanto a $p_{II} + q_{II}$ è, in questo caso per la notata simmetria della curva di frequenza,

$$p_{II} + q_{II} = p_I + q_I = 0{,}750.$$

Infine, per ottenere $p_{III} + q_{III}$ bisognerà riferirsi all'antiserie, per la quale deve essere

$$p'_I = \frac{s}{n'} = \frac{s}{5.000.050.000} = 0{,}500$$

$s = 2.500.025.000$, che appartiene alla classe di frequenza z per cui $1 + 2 + \ldots + (z - 1) + z = 2.500.025{,}000$, equazione poc'anzi risoluta ad altro scopo, di cui la radice accettabile è

$$z = 70710{,}53.$$

Si avrà quindi, come corrispondente valore di q' :

$$q'_s = \frac{100.000\ \frac{1}{100.000} + 99.999\ \frac{1}{99.999} + \ldots + 70710\ \frac{1}{70710}}{\text{ammontare totale del carattere}} =$$

$$= \frac{29.291}{100.000} = 0{,}293\ .$$

Per l'antiserie è dunque

$$p'_{I} + q'_{s} = 0{,}500 + 0{,}293 = 0{,}793$$

e per la data serie si avrà corrispondentemente (tenendo presente la simmetria delle curve di concentrazione della serie e dell'antiserie):

$$p_{III} + q_{III} = 2 - 0{,}793 = 1{,}207,$$

valore che poteva anche aversi da quello di $\frac{{}^{I}S_{\mu}}{2A'}$, per aggiunta di una unità, come è ovvio.

Eseguiamo ora la quadratura della superficie di concentrazione basandoci sui valori caratteristici sopra determinati, e sui corrispondenti valori dell'ascissa $p + q$, e tenendo altresì conto che tanto per $p + q = 0$, quanto per $p + q = 2$ è $p - q = 0$.

Posto $p + q = x$, $p - q = y$, la curva di concentrazione, passante per i 5 punti di coordinate

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0{,}750 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = 1{,}207 \quad x_5 = 2$$
$$y_1 = 0 \quad y_2 = 0{,}250 \quad y_3 = 0{,}236 \quad y_4 = 0{,}207 \quad y_5 = 0$$

si potrà, nel modo più pratico, interpolare col metodo di Lagrange, e si troverà

$$y = -0{,}0727\,x^4 + 0{,}4009\,x^3 - 0{,}9287\,x^2 + 0{,}8376\,x$$

e perciò

$$\int_0^2 y\,dx = 0{,}337\,.$$

Poichè l'area massima di concentrazione è 1, come rappresentata dal triangolo rettangolo *obc*, i cui cateti hanno convenzionalmente la lunghezza $\sqrt{2}$, così si conclude che il rapporto di concentrazione ottenuto per la solita distribuzione, in base alle quantità caratteristiche della curva di concentrazione, è 0,337 : valore che supera quello effettivo 0,333 di un po' più dell'1 %.

Si osservi che in questo esempio le quattro quantità caratteristiche della curva di concentrazione determinano (esclusi gli estremi) soltanto tre punti della curva di concentrazione dato che A = M e che perciò l'ordinata corrispondente all'ascissa $p_1 + q_1 = 0{,}750$ rappresenta tanto ${}^{I}S_{A} : 2A$ quanto ${}^{I}S_{M} : 2A$.

Esempio 2°.

Diamo ora un altro esempio, nel quale le quattro quantità caratteristiche corrispondono effettivamente a quattro punti distinti

della curva di concentrazione ; e a tal fine riprendiamo la distribuzione della proprietà terriera nello Stato di Victoria (1910). La determinazione delle solite caratteristiche potrebbe essere effettuata con procedimenti puramente aritmetici, analoghi a quelli dell'esempio precedente : ma, per maggiore speditezza, trattandosi, più che altro, di sperimentare l'efficacia della interpolazione su tali valori, essi sono stati determinati per via grafica, in base alla curva di concentrazione effettivamente tracciata come si è detto. Si è così trovato :

$$^{I}S_A / 2A = 0{,}52 \qquad D = 0{,}52$$
$$^{I}S_M / 2A = 0{,}42 \qquad ^{I}S_\mu / 2A' = 0{,}43.$$

Misurando, poi, le ascisse corrispondenti a queste ordinate, si è concluso che la curva di concentrazione passa per i punti di coordinate

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0{,}58 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = 1{,}01 \quad x_5 = 1{,}44 \quad x_6 = 2$$
$$y_1 = 0 \quad y_2 = 0{,}42 \quad y_3 = 0{,}52 \quad y_4 = 0{,}52 \quad y_5 = 0{,}43 \quad y_6 = 0$$

L'interpolazione col metodo di Lagrange fornisce

$$y = -0{,}11781\, x^5 + 0{,}58424\, x^4 - 1{,}04619\, x^3 + 0{,}29550\, x^2 + 0{,}80482\, x$$

e perciò

$$\int_0^2 y\,dx = 0{,}675 = R\,.$$

Il valore così ottenuto per R differisce di 0,015 da quello ottenuto per la stessa distribuzione nel secondo esempio del n. 7.

Si può rilevare che la misurazione dell'ordinata massima $^{I}S_A : 2A$ corrispondente all'ascissa 1,01 ha, con l'approssimazione di 0,01, fornito lo stesso valore 0,52 che si è trovato per D, cioè per l'ordinata corrispondente all'ascissa 1, benchè debba essere, a rigore, $^{I}S_A : 2A > D$, dato che tali due ordinate corrispondono ad ascisse diverse.

Esempio 3°.

Sui medesimi dati dell'esempio precedente, eseguiamo l'interpolazione della curva di concentrazione, applicando ancora il metodo di Lagrange, ma in base alle sole caratteristiche $^{I}S_M : 2A$, $^{I}S_A : 2A$ ed $^{I}S_\mu : 2A'$, cioè omettendo la caratteristica D.

Si sa, quindi, che la curva di concentrazione passa per i punti

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0{,}58 \quad x_4 = 1{,}01 \quad x_5 = 1{,}44 \quad x_6 = 2$$
$$y_1 = 0 \quad y_2 = 0{,}42 \quad y_4 = 0{,}52 \quad y_5 = 0{,}43 \quad y_6 = 0$$

Col metodo di Lagrange si trova

$$y = -0{,}00834\ x^4 + 0{,}00646\ x^3 - 0{,}48777\ x^2 + 1{,}00244\ x$$

e integrando

$$R = \int_0^2 y\,dx = 0{,}695\ .$$

In questo caso, benchè la curva interpolatrice sia stata condotta per un minor numero di punti che nel caso precedente, si è trovato per R un valore più soddisfacente, in quanto differisce da quelli del secondo esempio del n. 7 soltanto per 0,005. È, del resto, ben noto che l'aderenza della curva interpolata ad una curva empirica, presa come fondamentale, non cresce sempre al crescere del numero dei punti.

15) Passiamo a considerare le varie forme della curva di concentrazione. Ci limiteremo a considerare le curve di concentrazione ridotte (cfr. paragr. 13). Chiameremo *culminante* una curva di concentrazione che raggiunge la massima altezza sulla ordinata mediana, così che sia $^1S_A = D$. Le curve culminanti possono essere *simmetriche* (es. curva 1 della fig. 20) *asimmetriche* (es. curva 2 della fig. 20).

Le curve *asimmetriche* possono essere altresì *non culminanti* e in tal caso le distingueremo in *destrorse* o *sinistrorse* a seconda che la ascissa corrispondente ad ^1S_A è maggiore o minore di quella corrispondente a D, vale a dire a seconda che l'altezza massima della curva di concentrazione si trova a destra o a sinistra dell'ordinata mediana (nella fig. 20 le curve 3 e 5 sono *destrorse*, le curve 4 e 6 *sinistrorse*).

Tra le curve destrorse, e analogamente tra le sinistrorse, si possono distinguere le *subdestrorse* dalle *superdestrorse* (e analogamente le *subsinistrorse* dalle *supersinistrorse*) a seconda che l'ascissa corrispondente ad ^1S_A è $\leqslant$ di quella corrispondente ad $^1S_\mu$ (e rispettivamente $\leqslant$ di quella corrispondente a ^1S_M), ossia a seconda che l'altezza massima della curva cada dentro l'angolo *câe* o invece dentro l'angolo *eâb* (e rispettivamente entro l'angolo *dâc* o invece dentro l'angolo *oâd*). Nella fig. 20 la curva 3 è subdestrorsa, la 5 superdestrorsa, la 4 subsinistrorsa, la 6 supersinistrorsa.

Il concetto della simmetria, qui considerato in relazione alle curve di concentrazione (eventuale simmetria rispetto all'asse della retta di concentrazione) è pure applicabile alle altre curve di distribuzione: per una curva di frequenza vi sarà luogo a considerare l'eventuale

simmetria rispetto all'ordinata mediana ; per una curva di graduazione l'eventuale simmetria rispetto al punto mediano della curva stessa.

Ciò posto, si avverta come una curva di concentrazione simmetrica corrisponde a curve di graduazione asimmetriche e, viceversa, come le curve di graduazione e di frequenza simmetriche corrispondono a curve di concentrazione asimmetriche. Si noti, infatti, che, per che le curve di frequenza e di graduazione siano simmetriche, nel senso testè dichiarato, è necessario che sia $A = M$, e quindi ${}^{I}S_{A} = {}^{I}S_{M}$, mentre ciò importa l'asimmetria delle curve di concentrazione, in quanto l'altezza massima delle curve di concentrazione si trova in tal caso all'in-

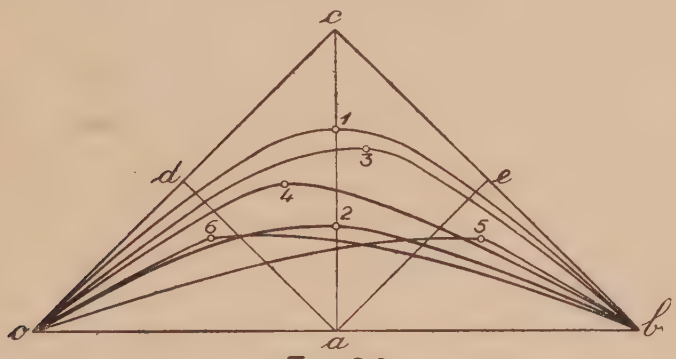


Fig. 20

crocio delle curve col segmento *da* ; la curva di concentrazione è dunque in tal caso sinistrorsa.

Altra particolarità notevole è che, mentre una data serie e la rispettiva antiserie dànno luogo normalmente a diverse curve di graduazione e a diverse curve di frequenza (cfr. fig. 10), esse dànno, invece, luogo alla stessa curva di concentrazione, per quanto diversamente orientata. Quando la serie e la rispettiva antiserie dànno luogo alla stessa curva di frequenza e di graduazione (la curva però sarà diversamente orientata per la serie e l'antiserie), la curva di concentrazione risulta simmetrica. In altre parole la curva di concentrazione risulta simmetrica quando, essendo per $p = x$; $q = y$, è, per $p = 1 - y$, $q = 1 - x$. In tal caso si ha $p - q = x - y$ sia per $p + q = x + y$ che per $p + q = 2 - x - y$; ciò indica precisamente che le altezze della curva di concentrazione sono uguali in due punti della retta di equidistribuzione simmetrici rispetto al punto mediano.

16) Studi approfonditi sulla forma della curva di concentrazione sono ancora da farsi. Essi potranno portare — io credo — a risultati interessanti.

A parte l'esame della forma che la curva di concentrazione assume nelle due ipotesi estreme di massima uguaglianza e di massima disuguaglianza, le sole curve di concentrazione per cui si è data l'espressione analitica sono, oltre quelle corrispondenti ad alcune distribuzioni teoriche (20), quella dei redditi globali (che vale anche per i redditi da lavoro e gli affitti) (21), e quella per il numero dei figli (22).

Anche in questi casi, però, lo scopo, più che lo studio della forma delle curve, era la misura del grado della concentrazione, per modo che la forma delle curve non venne sottoposta ad esame specialmente accurato.

Per ciò che concerne le relazioni tra la curva di concentrazione e quella di distribuzione, ci si è pure limitati a considerarla nel caso dei redditi globali.

Infine per parecchie distribuzioni tipiche (per esempio distribuzione a disuguaglianza massima, distribuzione uniforme ed altre distribuzioni lineari, distribuzioni binomiali, esponenziali, di tipo iperbolico, ecc.) (23) si sono determinati i valori della differenza media e del rapporto di concentrazione.

Ora molto vi è ancora da fare in tutti questi campi.

Innanzitutto vale la pena — credo — di descrivere le curve di concentrazione relative ai più importanti fenomeni e di esaminarne le caratteristiche.

Conviene poi tentare di darne la rappresentazione analitica.

Si noti che spesso — e in particolare per molteplici fenomeni economici e finanziari — le curve di concentrazione si presentano come più semplici delle curve di frequenza. Perciò il loro esame può essere

(20) Per distribuzioni lineari v. U. RICCI, *L'indice di variabilità e la curva dei redditi*, Roma, Athenaeum, 1916 ; E. J. GUMBEL, *Ein Mass der Konzentration bei pekuniären Verteilungen*, « Archiv f. Sozialwissenschaft, etc. », 1927 ; L. GALVANI, *Contributi alla determinazione degli indici di variabilità per alcuni tipi di distribuzione*, « Metron », vol. IX, 1, 1931 ; per distribuzioni esponenziali E. J. GUMBEL, *Ein Mass*, etc., già cit.

(21) C. GINI, *Indici di concentrazione e di dipendenza*, già cit. ; E. J. GUMBEL, *Ein Mass*, etc., già cit.

(22) C. GINI, *Indici di concentrazione e di dipendenza*, già cit.

(23) V. Memorie citate nelle tre note precedenti.

più fruttuoso e la loro rappresentazione analitica più facile a darsi di quanto non avvenga per le rispettive curve di frequenza o di graduazione.

Un ulteriore argomento di studio potrà essere quello di passare dalla equazione nota di una curva di concentrazione alla equazione della curva di frequenza e a quella della curva di graduazione relative allo stesso carattere, o, viceversa, dalla equazione nota della curva di frequenza o di graduazione alla equazione della rispettiva curva di concentrazione : ciò che si potrà fare mediante la integrazione o la differenziazione suggerite dalle relazioni tra le varie curve di distribuzione, richiamate nel paragrafo 2.

Quando si tratti di equazioni di curve di distribuzione teoriche, la ricerca ha solo un interesse teorico ; ma quando si tratti di equazioni che si adattino pure alla descrizione di certi caratteri o fenomeni concreti, la ricerca ha anche un interesse pratico, in quanto il riscontro coi dati osservati dei dati calcolati in base alle equazioni delle varie curve di distribuzione permette di giudicare per quale di tali curve l'equazione si adatti meglio ai dati osservati. È noto, infatti, che, se varie curve sono legate tra loro da relazioni teoriche, non è detto che esse rappresentino tutte ugualmente bene i dati osservati ; e ciò, sia perchè le relazioni teoriche si basano spesso su ipotesi che non rispondono esattamente a realtà, sia perchè le approssimazioni di una formula possono ripercuotersi, con effetto esagerato o attenuato, su quelle di altre formule, che dalla prima si deducono. Per i redditi globali, per esempio, e ancor più per i redditi da lavoro e gli affitti, è dimostrato che la curva di concentrazione riproduce i dati molto meglio che la corrispondente curva paretiana di graduazione.

Infine per le curve di concentrazione per cui si saranno determinate le rappresentazioni analitiche non sarà difficile, in molti casi, passare a determinare il valore teorico della differenza media e del rapporto di concentrazione, e quello di altri indici di variabilità.

18) Diamo, finalmente, un accenno dei vari procedimenti interpolatorï che, nei diversi casi particolari, potrebbero tentarsi per ottenere una soddisfacente rappresentazione analitica delle curve di concentrazione relative a distribuzioni concrete.

Gioverà, a tal fine, introdurre, oltre quelle precedentemente accennate, altre distinzioni qualitative delle curve in parola.

Posto, per semplicità, nel nostro solito sistema di riferimento, $x = p + q$ $(0 \leq x \leq 2)$, $y = p - q$, una curva di concentrazione si

dirà *asimmetrica riducibile* quando sia possibile determinare una funzione $\varphi(x)$ tale che la curva $y = f[\varphi(x)]$ sia simmetrica, il che richiederà che, detta c l'ascissa del punto di culminazione della curva, si abbia

$$f\left[\varphi\{(c + (x - c)\}\right] = f\left[\varphi\{(c - (x - c)\}\right].$$

Così, un primo tipo di curve asimmetriche riducibili sarà quello per cui, essendo ω una costante conveniente, si abbia

$$f\left[c + (x - c)\right] = f\left[\omega\{(c - (x - c)\}\right]$$

(curve riducibili *per proporzionalità*).

Un secondo tipo potrà essere quello per cui

$$f\left[\log\{c + (x - c)\}\right] = f\left[\log\{\omega c - \omega(x - c)\}\right]$$

(curve riducibili *per proporzionalità logaritmica*).

a) Ciò posto, l'interpolazione di una curva *culminante simmetrica* potrà essere sperimentata mediante una equazione del tipo:

$$(I) \qquad y = D - D\,|x - 1|^k$$

essendo D l'ordinata massima (in questo caso ordinata mediana) ed essendo k un parametro da determinare convenientemente. La (I) rappresenta evidentemente una curva simmetrica rispetto alla retta $x = 1$, dotata per $x = 1$ dell'ordinata massima D, e passante per gli estremi della curva di concentrazione (0,0), (2,0). La parte sottrattiva $D\,|x - 1|^k$ evidentemete rappresenta il segmento parallelo all'asse delle ordinate, compreso fra il punto della curva di ascissa x, e la tangente alla curva stessa per il punto di culminazione. Inoltre, poichè

$$y' = -k\,D\,(x - 1)^{k-1} \qquad \text{per } x > 1$$
$$y' = \quad k\,D\,(1 - x)^{k-1} \qquad \text{per } x < 1,$$

e inoltre

$$y'' = -k\,(k - 1)\,D\,(x - 1)^{k-2} \qquad \text{per } x > 1$$
$$y'' = -k\,(k - 1)\,D\,(1 - x)^{k-2} \qquad \text{per } x > 1,$$

la curva risulterà concava rispetto all'asse delle x dovunque sia $k(k - 1) > 0$ e quindi (essendo escluso che sia $k < 0$, poichè risulterebbe allora $y < 0$) per $k > 1$.

Si noti, però, che per $x = 0$ e per $x = 2$ si ha rispettivamente

$$y'_{k=0} = k\,D \quad , \quad y'_{k=2} = -k\,D.$$

Ora, se è $k\,D \leq 1$, cioè $k \leq \frac{1}{D}$, la curva (I) rimane effettivamente dentro il triangolo di massima concentrazione, mentre se fosse $k > \frac{1}{D}$ tale curva eccederebbe, nelle porzioni estreme, dal detto triangolo.

Quindi l'intervallo entro cui può variare k affinchè la (I) abbia i requisiti generici di una curva di concentrazione è: $1 < k \leq \frac{1}{D}$.

Può darsi, tuttavia, che anche per valori di k eccedenti il limite superiore di questo intervallo la curva interpolatrice costituisca, dal punto di vista pratico, una buona rappresentazione della curva di concentrazione (24).

Quanto alla determinazione effettiva di k, essa potrà ottenersi operando col metodo di Cauchy sul logaritmo di $D\,|x - 1|^k$, in base ad alcune ordinate misurate nella metà della curva da una parte o dall'altra dell'ordinata massima.

b) L'interpolazione di una curva *culminante asimmetrica* potrà effettuarsi con gli stessi criteri stabiliti in *a*), ma tenendo distinte le parti a sinistra e a destra dell'ordinata massima (mediana), e determinando per ciascuna di tali parti un conveniente valore del parametro che è ad esponente.

L'equazione della curva interpolatrice sarà dunque della forma

$$(II) \qquad y = D - \begin{cases} D\,(1-x)^k & (\text{per } 0 \leq x \leq 1) \\ D\,(x-1)^k & (\text{per } 1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

---

(24) Se $kD > 1$ l'intersezione della (1) (parte a sinistra del punto di massimo) con la retta $y = x$, ha luogo per $x = D - D\,(1-x)^k$. Una soluzione approssimata di questa equazione si può avere considerando intuitivamente che il valore x cercato è circa il doppio del valore $\bar{x}$ per cui la derivata prima della $y = D - D\,(1-x)^k$ acquista il valore 1, ciò che accade per $\bar{x} = 1 - \frac{1}{\sqrt[k-1]{k\,D}}$.

In sostanza, $\bar{x}$ è l'ascissa del punto di massima distanza sull'arco che eccede la retta $y = x$, rispetto a questa retta. Questo valore ci consente di stimare quale tratto della curva interpolatrice risulti eventualmente esterno al triangolo di massima concentrazione, nella parte a sinistra. Analogamente nella parte a destra si troverebbe che il valore x cercato è circa il doppio di $\frac{1}{\sqrt[k-1]{k\,D}}$.

Valgono, anche qui, le precedenti osservazioni circa l'eventuale esorbitare dei due rami della curva interpolatrice negli estremi rispettivamente prossimi ad $x = 0$ e ad $x = 2$.

Esempio :

L'ispezione della curva di concentrazione tracciata per la distribuzione della proprietà terriera nello Stato di Victoria (1910) mostra che essa può *praticamente* considerarsi come una curva *culminante non simmetrica* (essa è, veramente, lievemente destrorsa).

Per la metà sinistra della curva, cioè per $0 \leq x \leq 1$ si trova, dividendo l'intervallo di variazione delle ascisse in 5 parti uguali, cioè corrispondentemente ai valori

$$\xi = 1 - x = 0 \quad 0{,}2 \quad 0{,}4 \quad 0{,}6 \quad 0{,}8 \quad 1$$

che il segmento s (parallelo all'asse y) compreso fra la curva di concentrazione e la tangente nel punto di ascissa 1, assume rispettivamente i valori :

$$s = 0 \quad 0{,}027 \quad 0{,}089 \quad 0{,}188 \quad 0{,}328 \quad 0{,}516\ (= D)$$

Sostituendo in $\log s = \log D + k \log (1 - x)$ le ultime cinque coppie di valori corrispondenti e sommando membro a membro, si ricava

$$k = \frac{\Sigma \log s - 5 \log D}{\Sigma \log \xi} = 1{,}894.$$

Analogamente, per la metà destra della curva, cioè per $1 \leq x \leq 2$ si trova, in base ai corrispondenti valori delle ascisse e delle ordinate (esclusi i due primi) :

$$\begin{array}{l} \xi = x - 1 = 0 \ 0{,}2 \quad 0{,}4 \quad 0{,}6 \quad 0{,}8 \quad 1 \\ s = 0 \ 0{,}017 \ 0{,}071 \ 0{,}174 \ 0{,}325 \ 0{,}156\ (= D) \\ h = 2{,}133 \end{array}$$

Perciò l'equazione interpolatrice (II) assume la forma :

$$y = 0{,}516 - \begin{array}{ll} 0{,}516\ (1 - x)^{1{,}894} & (\text{per } 0 \leq x \leq 1) \\ 0{,}516\ (x - 1)^{2{,}133} & (\text{per } 1 \leq x \leq 2). \end{array}$$

Se, per integrazione di questa funzione, si determinasse il valore del rapporto di concentrazione, si troverebbe $R = 0{,}689$, valore praticamente coincidente con quello determinato al n° 7. Si trova, poi, che $\frac{1}{D} = 1{,}938$; e poichè $k = 1{,}894 < 1{,}938$, mentre $h = 2{,}133 > 1{,}938$,

così si conclude che l'estremo sinistro della curva di concentrazione non eccede mentre l'estremo destro eccede il triangolo di massima concentrazione. Non ostante tale eccedenza l'interpolazione è molto soddisfacente, come risulta dalla approssimazione ottenuta per il valore del rapporto di concentrazione.

Tenendo presente la nota in calce n. 24 si trova che sull'arco della curva interpolatrice eccedente, a destra, il punto di massima distanza dalla retta $y = 2 - x$ ha l'ascissa 1,919.

Relativamente alla distribuzione ora considerata, nella fig. 21 sono tracciate sia la curva di concentrazione primitiva, sia quella

Fig. 21

ottenuta per interpolazione, e si constata che l'adattamento di questa ultima alla precedente è molto soddisfacente.

c) Si supponga ora data una curva di concentrazione *non culminante, riducibile di* 1° *tipo* (cioè riducibile per proporzionalità). Detta S l'ordinata massima (per ricordare che tale ordinata ha, come sappiamo, il valore ${}^{1}S_A / 2A$) e detta $x = M$ l'ascissa corrispondente a tale ordinata, potrà essere sperimentata come curva interpolatrice una curva del tipo:

$$\text{(III)} \qquad y = S - \begin{cases} S\left(\dfrac{M - x}{M}\right)^k & (\text{per } 0 \leq x \leq M) \\ S\left(\dfrac{x - M}{2 - M}\right)^k & (\text{per } M \leq x \leq 2) \end{cases}$$

dove la divisione per M, e rispettivamente per 2 — M, ha evidentemente il significato di riduzione di ciascuno degli intervalli determinati dal punto di culminazione, e cioè degli intervalli M — 0 e 2 — M

all'unità. Per effetto di tali riduzioni la curva è, per definizione, resa simmetrica, e quindi uno stesso valore di k vale a sinistra e a destra di M. Così come in *a*), si vede subito che la curva (III) è concava rispetto all'asse delle x per $k > 1$. Se poi si considera la derivata nell'estremo a sinistra, e cioè per $x = 0$, si trova:

$$y' = \frac{Sk}{M}\left(\frac{M - x}{M}\right)^{k-1}$$

$$y'_{x=0} = \frac{Sk}{M}.$$

Affinchè in questo estremo la curva non ecceda il triangolo di massima concentrazione deve essere

$$\frac{Sk}{M} \leq 1, \text{ cioè } k \leq \frac{M}{S}.$$

Il calcolo di k potrà essere eseguito come venne accennato in *b*), basandosi su alcune ordinate della curva misurata indifferentemente nell'una o nell'altra delle due parti della curva, determinate dall'ordinata massima.

d) Una curva di concentrazione *non culminante, non riducibile di* 1° *tipo* potrà essere rappresentata da una equazione interpolatrice analoga alla (III), ma avente ad esponente un distinto parametro per ciascuno dei rami, da una parte e dall'altra dell'ordinata massima. Sarà dunque:

$$\text{(IV)} \qquad y = S - \begin{cases} S\left(\frac{M - x}{M}\right)^{k} & \text{per } 0 \leq x \leq M \\ S\left(\frac{x - M}{2 - M}\right)^{k} & \text{per } M \leq x \leq 2; \end{cases}$$

e per ciascuno dei tratti estremi della curva, rispettivamente in prossimità delle ascisse $x = 0$ ed $x = 2$, saranno da ripetersi le solite considerazioni, circa la eventuale eccedenza dei tratti stessi oltre il triangolo di massima concentrazione.

Esempio:

Si è detto che la curva di concentrazione relativa alla distribuzione della proprietà terriera nello Stato di Victoria (1910), considerata precedentemente, è lievemente destrorsa. Difatti, sul grafico, il punto di culminazione, anzichè corrispondere all'ascissa $x = 1$, nel

nostro solito sistema di riferimento, corrisponde all'ascissa $x = 1{,}014$. Non appare, poi, che la curva sia riducibile a simmetrica mediante una trasformazione delle ascisse. La curva è dunque *non culminante non riducibile.*

Per la parte della curva sull'intervallo da $x = 0$ ad $x = 1{,}014$ (prima parte), si trovano, in corrispondenza ai punti di divisione dell'intervallo stesso in 5 parti uguali, i seguenti valori del segmento s compreso fra la curva di concentrazione e la tangente nel punto di culminazione:

$$s = 0 \quad 0{,}023 \quad 0{,}085 \quad 0{,}184 \quad 0{,}325 \quad 0{,}516 \ (= S)$$

Eseguita sulla x la trasformazione $\xi = \dfrac{1{,}014 - x}{1{,}014}$, che è quella di cui si fa uso nella equazione interpolatrice, si potrà dire che i detti valori di s corrispondono ai seguenti valori di ξ:

$$\xi = 0 \quad 0{,}2 \quad 0{,}4 \quad 0{,}6 \quad 0{,}8 \quad 1$$

In base alle ultime 5 coppie di valori, si trova, con lo stesso procedimento dell'esempio precedente,

$$k = \frac{\Sigma \log s - 5 \log S}{\Sigma \log \xi} = 1{,}972 \ .$$

Analogamente, per la parte della curva da $x = 1{,}014$ a $x = 2$, eseguita la trasformazione $\xi = \dfrac{x - 1{,}014}{2 - 1{,}014}$, si trovano, in corrispondenza ai valori

$$\xi = 0 \quad 0{,}2 \quad 0{,}4 \quad 0{,}6 \quad 0{,}8 \quad 1$$

i seguenti valori del segmento s:

$$s = 0 \quad 0{,}020 \quad 0{,}075 \quad 0{,}178 \quad 0{,}329 \quad 0{,}516$$

e di qui risulta che $h = 2{,}056$.

L'equazione interpolatrice (IV) assume perciò la forma

$$y = 0{,}516 - \begin{cases} 0{,}516 \left(\dfrac{1{,}014 - x}{1{,}014}\right)^{1{,}972} & \text{per } 0 \leq x \leq 1{,}014 \\ 0{,}516 \left(\dfrac{x - 1{,}014}{2 - 1{,}014}\right)^{2{,}056} & \text{per } 1{,}014 \leq x \leq 2 \ . \end{cases}$$

Per separata integrazione dei due archi di curve interpolatrici, a sinistra e a destra di $x = 1$, si trova che le due parti corrispondenti

dell'area di concentrazione sono 0,347 e 0,342, cosicchè risulta lo stesso valore R = 0,689 che si era trovato col procedimento interpolatorio *b*), riguardando la curva come culminante.

La fig. 22 rappresenta, per la distribuzione considerata, la curva di concentrazione primitiva e quella interpolata col metodo ora

Fig. 22

esposto. Anche qui si constata che la curva interpolatrice ha una buona aderenza con quella primitiva.

e) Un altro principio, sul quale fondare la interpolazione di una curva di concentrazione *culminante simmetrica*, potrebbe essere quello (V. fig. 23) di considerare una sua ordinata generica come ottenuta

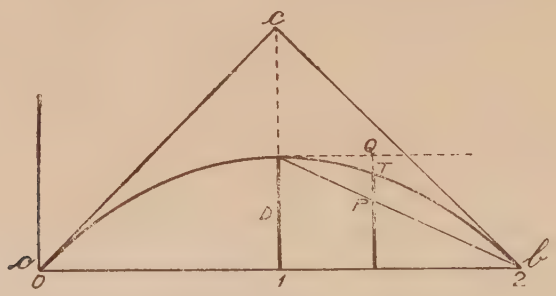


Fig. 23

sottraendo dall'ordinata massima D il segmento $\overline{PQ}$ (compreso fra la corda di metà della curva e la parallela alla base mandata per il vertice della curva) e aggiungendo il segmento $\overline{PT}$ (compreso fra la corda stessa e la curva), e cioè : $y = D - \overline{PQ} + \overline{PT}$.

Ora è, evidentemente, $\overline{PQ} = D\,|\,x - 1\,|$; quanto a $\overline{PT}$, lo si può considerare come una funzione di x che deve annullarsi per $x = 0$,

$x = 1$, $x = 2$ ed essere positiva e concava rispetto all'asse delle ascisse in ciascuno degli intervalli da 0 a 1 e da 1 a 2.

Una funzione dotata di tali requisiti può essere, per conveniente scelta di k e di h, nell'intervallo 0 ... 1, esclusi gli estremi, il prodotto delle due funzioni $D\,|\,x-1\,|^k$ e $(1-D)\,\big|\,1-|\,x-1\,|\,\big|^h$ (25); cosicchè come equazione della curva interpolatrice si avrà:

$$(V)\quad y = D - D\,|\,x-1\,| + D\,|\,x-1\,|^k\,(1-D)\,\big|\,1-|\,x-1\,|\,\big|^h,$$

dove i parametri k e h si potranno ottenere considerando in corrispondenza a diversi valori x_i di x (fra 0 ed 1, o indifferentemente fra 1 e 2) i valori v_i di quella parte P T dell'ordinata che deve essere rappresentata da $D\,|\,x-1\,|^k\,(1-D)\,\big|\,1-|\,x-1\,|\,\big|^h$.

Passando ai logaritmi si avranno altrettante equazioni della forma:

$$\text{Cost.} + k \log |\,x_i - 1\,| + h \log \big|\,1 - |\,x_i - 1\,|\,\big| = \log v_i\,.$$

Scindendo questo gruppo di equazioni in due gruppi presso a poco ugualmente numerosi, e sommando membro a membro le equazioni di ciascun gruppo si passerà ad un sistema di due sole equazioni lineari in k ed h, che potranno fornire valori approssimati di questi parametri.

Si noti che la presenza dei fattori D e D — 1 nel terzo termine del secondo membro della (V) ha l'effetto di rendere nullo il termine stesso sia per D — 1 (massima concentrazione) che per D = 0 (concentrazione nulla), come deve appunto essere affinchè la curva interpolatrice venga rispettivamente a coincidere o coi cateti o con l'ipotenusa del triangolo fondamentale.

f) Se la curva di concentrazione fosse *culminante non simmetrica* il procedimento di cui ad *e*) dovrebbe essere applicato distintamente alle due sezioni della curva da una parte e dall'altra del punto di culminazione: e in corrispondenza a ciascuna di tali sezioni si determinerebbe una coppia di parametri h e k.

g) Consideriamo uno qualunque dei due rami della curva interpolatrice, e cioè quello a sinistra, oppure quello a destra del punto

---

(25) Difatti, per k ed h nell'intervallo detto, le funzioni

$$\varphi(x) = D\,|\,x-1\,|^k \quad \text{e} \quad \Psi(x) = (1-D)\,\big|\,1-|\,x-1\,|\,\big|^h$$

sono, per $[x-1]$ crescente da 0 ad 1, entrambe concave rispetto all'asse delle ascisse e positive, decrescente l'una da D a 0 e crescente l'altra da 0 a 1 — D.

Basta questo per concludere facilmente che il prodotto $\varphi(x)\,\Psi(x)$ costituirà, nell'intervallo di variazione di $|\,x-1\,|$, una funzione positiva, nulla agli estremi e concava.

di culminazione. Per il primo di essi, che è quanto dire per $0 \leq x \leq 1$, si ha derivando:

$$y' = D + D(1 - D)(1 - x)^{k-1} x^{h-1} \{ -kx + h(1 - x) \},$$

e poichè h e k sono positivi ma minori di 1, cioè $k - 1 < 0$, $h - 1 < 0$ così per x tendente a 0 e per x tendente ad 1 risulta

$$\lim y' = \infty .$$

Ciò significa che il ramo di curva considerato, pur rimanendo sempre concavo rispetto all'asse x, ha nei suoi estremi la tangente parallela all'asse y, e quindi, in prossimità di tali punti, certamente esorbita dal triangolo corrispondente alla massima concentrazione.

Altrettanto si dica per il ramo a sinistra dal punto di culminazione. Ciò non pertanto il risultato della interpolazione agli effetti di determinare l'area di concentrazione può essere soddisfacente, come si vedrà dall'esempio che segue. Si tenga pure presente che il fatto di esorbitare dal triangolo di massima concentrazione *poteva* anche verificarsi per la curva interpolatrice considerata al n. 18, *a*).

Esempio:

Presa ancora la curva di concentrazione relativa alla distribuzione della proprietà terriera (Victoria, 1910), curva che, come abbiamo già detto, è praticamente culminante asimmetrica, consideriamone anzitutto, per la interpolazione, la sola parte a sinistra del punto di culminazione.

Tracciata la corda sottesa dall'arco di curva considerato, il quale ha come ordinata massima $D = 0{,}516$, i primi due termini dell'equazione della nostra curva interpolatrice risultano essere $0{,}516 - 0{,}516(1 - x)$.

Rimane a calcolare il terzo termine, che deve rappresentare il segmento di ordinata compreso fra la detta corda e la curva. A tal fine, misurati sulla figura i segmenti v di ordinata relativi alla divisione dell'intervallo 0 . . . 1 in 5 parti uguali, si è trovato per

$$x = 0 \quad 0{,}2 \quad 0{,}4 \quad 0{,}6 \quad 0{,}8 \quad 1$$

rispettivamente

$$v = 0 \quad 0{,}083 \quad 0{,}119 \quad 0{,}085 \quad 0{,}074 \quad 0 .$$

Scritte le relazioni della forma

$$\log D + \log(1 - D) + k \log(1 - x_i) + h \log x_i = \log v_i$$

relativamente alle quattro coppie intermedie di valori corrispondenti per x e v, si sono addizionate la prima con la terza, e la seconda con la quarta, in modo da ottenere il sistema

$$0{,}4948500\ k + 0{,}9208187\ h = 0{,}9459582$$
$$0{,}9208187\ k + 0{,}4948500\ h = 0{,}8498725$$

che ha fornito

$$k = 0{,}52148 \qquad h = 0{,}74705\ .$$

L'equazione interpolatrice dell'arco di curva considerato è pertanto

$$y = 0{,}516 - 0{,}516\ (1 - x) + 0{,}516\ (1 - x)^{0{,}521}\ 0{,}484\ x^{0{,}747}.$$

Consideriamo, ora, la parte della curva di concentrazione a destra del punto di culminazione e, come variante sperimentale al procedimento usato per l'altra parte, dividiamo l'intervallo 1 . . . 2 in sei anzichè in cinque parti uguali ; posto, per semplicità, $\xi = x - 1$, in corrispondenza ai valori di divisione intermedî :

$$\xi = 0{,}167 \quad 0{,}333 \quad 0{,}500 \quad 0{,}667 \quad 0{,}833$$

troveremo rispettivamente

$$v = 0{,}073 \quad 0{,}124 \quad 0{,}141 \quad 0{,}124 \quad 0{,}078.$$

Scritte le equazioni logaritmiche, come per la prima parte, relative a queste cinque coppie di valori e addizionate membro a membro le prime tre e poi le altre due, abbiamo ottenuto un sistema lineare rispetto a k e h dal quale abbiamo ricavato :

$$k = 0{,}54373 \qquad h = 0{,}50153,$$

cosicchè l'equazione interpolatrice per questa seconda parte della curva di concentrazione risulta essere :

$$y = 0{,}516 - 0{,}516\ (x - 1) + 0{,}516\ (x - 1)^{0{,}544}\ 0{,}484\ (2 - x)^{0{,}502}$$

La prima parte dell'area di concentrazione calcolata per integrazione della prima curva interpolatrice risulta essere (sviluppando in serie il prodotto $(1 - x)^{0{,}521}\ x^{0{,}747}$ e trascurando i termini di grado superiore al terzo) 0,342 ; similmente la seconda parte dell'area di concentrazione risulta 0,358.

Col procedimento esposto risulta dunque R = 0,700, valore che differisce di 0,01 da quello calcolato al N. 7.

La fig. 24 rappresenta la curva di concentrazione fondamentale (in linea punteggiata) e la interpolatrice (in linea piena). Quest'ultima esorbita dal triangolo di massima concentrazione (come si era detto

Fig. 24

in generale) intorno ai punti $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ ed è in $x = 1$ fornita di una cuspide. Ciò nondimeno, per effetto di compensazioni che la figura mette in evidenza, l'area di concentrazione viene fornita dalla curva interpolatrice con ottima approssimazione.

19) Data una curva di concentrazione (V. fig. 25), inscriviamo in essa il triangolo $o\ P_1\ b$ di massima altezza sulla base ob; su ciascuno dei segmenti $o\ P_1$ e $P_1\ b$ il triangolo di massima altezza $o\ P_1\ P_2$ e $P_1\ b\ P_2'$ che non eccede la curva; su ciascuno dei quattro segmenti

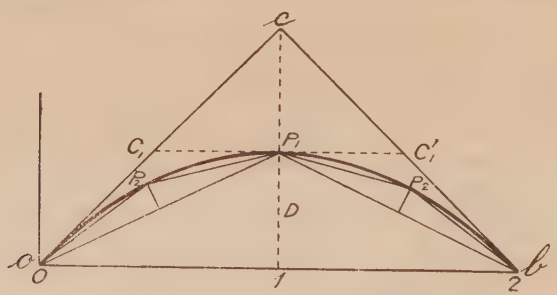


Fig. 25

$o\ P_2$, P_2P_1, P_1P_2', $P_2'\ b$ il triangolo di massima altezza che non eccede la curva, e così indefinitamente. Per i vertici di tali triangoli P_1, P_2 P_2' . . . si conducano le tangenti alla curva, dimodochè ciascuno di quei triangoli, dopo il triangolo $o\ P_1\ b$, verrà ad essere, come $o\ P_1\ P_2$,

parte di un triangolo che lo inviluppa, come $o\,P_1\,C_1$, e che ha col primo la base comune, mentre gli altri due lati sono costituiti, meno che nei vertici o e b, dalle tangenti alla curva. A differenza dei successivi, il primo triangolo inscritto nella curva, e cioè $ob P_1$, ha come inviluppante il triangolo fondamentale obc, i cui lati non sono generalmente tangenti alla curva di concentrazione. Se, nella serie dei triangoli inscritti considerati, ciascuno sta al rispettivo triangolo inviluppante in un rapporto costante, cioè se

$$ob P_1 : obc = o\,P_1P_2 : o\,P_1C_1 = P_1\,b\,P_2' : P_1\,b\,C_1' = \ldots$$

la curva considerata si può dire a *tensione uniforme.*

In tale ipotesi (o ipotesi della *equitensione*), è possibile procedere analiticamente, per via elementare, alla quadratura esatta della superficie di concentrazione, che nel nostro sistema di riferimento rappresenta, come sappiamo, il valore del rapporto di concentrazione. Si avrà anzitutto

$$R = \triangle_0 + (\triangle_1 + \triangle_1') + (\triangle_2 + \triangle_2' + \triangle_2'' + \triangle_2''') + \ldots$$

essendo $\triangle_0$ l'area del primo triangolo inscritto ; $\triangle_1$ e $\triangle_1'$ le aree dei due triangoli inscritti nelle due parti della curva che eccedono il primo triangolo inscritto ; $\triangle_2$, $\triangle_2'$, $\triangle_2''$. $\triangle_2'''$, le aree dei quattro triangoli inscritti nelle quattro parti della curva che eccedono i secondi triangoli inscritti, e così via.

a) Ciò posto, se la curva è culminante, ed è, come sempre, D l'ordinata massima (mediana) si avrà

$$\text{area } obc = 1 \; ; \; \triangle_0 = D,$$

cosicchè il rapporto di ciascun triangolo al rispettivo inviluppante sarà espresso da D.

Inoltre la somma delle aree dei due secondi triangoli inviluppati sarà :

$$o\,C_1P_1 + b\,P_1C_1' = D\ (1 - D)$$

cosicchè, per definizione ;

$$(\triangle_1 + \triangle_1') : D\ (1 - D) = D$$

$$\triangle_1 + \triangle_1' = D \,.\, D \,.\, (1 - D)$$

ed anche

$$(\triangle_1 + \triangle_1') : \triangle_0 = D\ (1 - D).$$

Nello stesso modo risulterebbe

$$(\triangle_2 + \triangle_2' + \triangle_2'' + \triangle_2''') : (\triangle_1 + \triangle_1') = D\ (1 - D)$$

e così indefinitamente, e pertanto :

$$\text{(VI)} \qquad R = D + D^2 (1 - D) + D^3 (1 - D)^2 + \ldots,$$

e poichè $D (1 - D) < 1$:

$$\text{(VII)} \qquad R = \frac{D}{1 - D (1 - D)},$$

formula che esprime il rapporto di concentrazione in funzione dell'ordinata massima D della curva di concentrazione.

Si noti, anzitutto, che R raggiungerà il valore massimo 1 soltanto quando sia

$$D = 1 - D (1 - D)$$

cioè $D = 1$.

Si noti altresì che, arrestandosi per il calcolo di R all'*m.*° termine del secondo membro della (VI), si ha come somma

$$\frac{D - D^{m+1} (1 - D)^m}{1 - D (1 - D)}$$

e si commette un errore assoluto

$$\frac{D^{m+1} (1 - D)^m}{1 - D (1 - D)}$$

ed un errore relativo del $100\ D^m (1 - D)^m$ %.

b) Quando la curva di concentrazione non sia culminante, i ragionamenti fatti ad *a*) possono ripetersi, con la sola sostituzione di ${}^1S_A / 2A$ a D. Posto, per semplicità, ${}^1S_A / 2A = S$ si avrà analogamente alla (VII) la

$$\text{(VII')} \qquad R = \frac{S}{1 - S (1 - S)}$$

rispetto alla quale si potranno, evidentemente, ripetere anche le osservazioni fatte sulla VII.

20) Le formule (VII) e (VII') possono impiegarsi, sempre nella supposizione della tensione uniforme, a determinare un limite superiore della differenza fra R e D e della differenza fra R e S.

Si ha, infatti, dalla (VII) :

$$R - D = \frac{D^2 (1 - D)}{1 - D (1 - D)}$$

e poichè

$$\text{Max}\ \frac{1}{1-D\,(1-D)} = \frac{1}{1-\text{Max}\,D\,(1-D)} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

così risulterà certamente

$$\text{(VIII)} \qquad R - D \leq \frac{4}{3} D^2 (1 - D)\,;$$

e analogamente risulterebbe

$$\text{(VIII')} \qquad R - S \leq \frac{4}{3} S^2 (1 - S)\,.$$

Esempio 1°:

Si è detto che la distribuzione della proprietà terriera nello Stato di Victoria (1910) dà luogo ad una curva di concentrazione praticamente culminante. Tracciati sul diagramma, di cui si è già fatto cenno, i triangoli $\triangle_0$, $\triangle_1$, $\triangle_1'$, $\triangle_2$ $\triangle_2'$ $\triangle_2''$ $\triangle_2'''$ considerati nel n. 19, abbiamo verificato che il rapporto fra ciascuno di tali triangoli e il suo inviluppante (ossia il rapporto delle rispettive altezze sulla base comune) è pressochè costante e quindi uguale a $0{,}516 = D = {}^1S_A$. La curva può dunque essere praticamente considerata di tensione uniforme, e perciò, a sensi della formula (VII) si avrà

$$R = \frac{0{,}516}{1 - 0{,}516 \times 0{,}484} = 0{,}688$$

valore che differisce soltanto di 0,002 da quello determinato al n. 7.

Esempio 2°:

La distribuzione delle successioni dichiarate in Francia nel 1929 (*Bulletin de Statistique et de Législation comparée*, luglio 1930), dà luogo ad una curva di concentrazione non culminante che abbiamo effettivamente tracciata, rappresentando l'intervallo di variazione di p (e di q) con un segmento lungo 50 cm. Inscritti i triangoli $\triangle_0$, $\triangle_1$ e $\triangle_1'$; $\triangle_2$, $\triangle_2'$, $\triangle_2''$, $\triangle_2'''$ di cui al n. 19, abbiamo constatato che il rapporto tra ciascuno di tali triangoli e il suo inviluppante (ossia il rapporto delle rispettive altezze sulla base comune) è pressochè costante ed uguale a $0{,}65 = S$. La curva può quindi essere praticamente consi-

derata di tensione uniforme. Il rapporto di concentrazione si trova così essere, secondo la formula (VII′) :

$$R = \frac{0{,}65}{1 - 0{,}65 \times 0{,}35} = 0{,}841\,,$$

mentre per misurazione planimetrica si è trovato

area di concentrazione = 8.889 unità planimetriche

triangolo di massima concentrazione = 10,756 unità planimetriche,

infine

$$R = \frac{8.889}{10{,}756} = 0{,}826\,.$$

Il primo valore supera il secondo di poco più del 2 %.

Si noti che la uniformità di tensione è stata sperimentata praticamente esatta in questi due esempi, soltanto per i primi triangoli della successione $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_2'$, $\triangle_3$, $\triangle_3'$.,.. che, d'altronde, sono quelli di maggiore rilevanza nella costituzione di R, considerato come somma di una serie.

Non è, naturalmente, escluso che per distribuzioni teoriche obbedienti a certe leggi si possa stabilire a priori la uniformità di tensione delle rispettive curve di concentrazione. È questo un altro problema che si affaccia nella teoria di queste curve.

Infine, osserviamo che le relazioni (VIII) e (VIII′) risultano da questi esempi confermate.

Difatti nel primo esempio :

$$R - D = 0{,}688 - 0{,}516 = 0{,}172$$

$$\frac{4}{3} D^2 (1 - D) = 0{,}172\,;$$

e nel secondo :

$$R - S = 0{,}841 - 0{,}650 = 0{,}191.$$

mentre

$$4/3\, S^2 (1 - S) = 0{,}197.$$

21) Si è, in altro luogo (26) studiato l'influenza che esercita sul rapporto di concentrazione il fatto di sostituire, alla intera seriazione del carattere, una seriazione tronca inferiormente, cioè una seriazione che contenga i soli casi in cui il carattere stesso si presenta con una intensità superiore a un dato limite. La considerazione di tale caso

(26) C. Gini. *Sulla misura della concentrazione*, etc., già cit., n. 12.

ha importanza, oltrechè dal punto di vista teorico, anche da quello pratico, perchè effettivamente accade spesso di poter ottenere da una osservazione statistica, non già la seriazione totale del carattere, ma soltanto una seriazione tronca inferiormente. In quell'occasione si è trovato che se il carattere x ha una frequenza di densità Vx^{-h}, cioè se il numero di volte in cui il carattere assume un valore compreso fra x ed $x + dx$ è $Vx^{-h}\,dx$, e sono soddisfatte alcune altre condizioni secondarie, allora il rapporto di concentrazione per la seriazione totale può ritenersi approssimativamente uguale a quello di una seriazione parziale dedotta dalla primitiva troncandola inferiormente. È quello che si verifica, ad esempio, per talune distribuzioni di redditi globali.

Il fatto che una serie e la corrispondente antiserie hanno la stessa curva di concentrazione (salvo la inversione dell'orientamento) ci persuade poi che se una serie dà luogo ad un rapporto di concentrazione uguale a quello di una sua serie parziale ottenuta col troncare la data inferiormente, passando all'antiserie si verificherà che il rapporto di concentrazione di questa sarà uguale a quello di una parte della antiserie ottenuta col troncare tale antiserie superiormente.

Queste constatazioni suggeriscono di indagare se potrebbe accadere che, scissa la seriazione totale di un carattere in due seriazioni parziali mediante un valore del carattere che assuma la funzione di valore massimo per l'una (seriazione tronca superiormente) e di valore minimo per l'altra (seriazione tronca inferiormente), il rapporto di concentrazione della seriazione totale, e cioè

$$R = \frac{c}{m}$$

(dove c è l'area di concentrazione, ed m l'area del triangolo corrispondente alla concentrazione massima), risulti uguale a

$$\frac{c_1 + c_2}{m_1 + m_2}$$

dove c_1, m_1 e c_2, m_2, hanno per le due seriazioni parziali significato analogo a quello di c, m per la seriazione totale.

Ciò equivale a domandarsi se, essendo

$$R_1 = \frac{c_1}{m_1} \quad \text{e} \quad R_2 = \frac{c_2}{m_2}$$

i rapporti di concentrazione relativi alle due seriazioni parziali, rappresentati nella fig. 26 da

$$R_1 = \frac{\text{area segm. } o\,g\,d}{\text{area triang. } o\,e\,d}\ ,\quad R_2 = \frac{\text{area segm. } d\,h\,b}{\text{area triang. } d\,f\,b}$$

ed essendo

$$R = \frac{\text{area segm. } o\,d\,b}{\text{area triang. } o\,c\,b}\ ,$$

possa essere

$$R = \frac{\text{area segm. } o\,g\,d + \text{area segm. } d\,h\,b}{\text{area triang. } o\,e\,d + \text{area triang. } d\,f\,b}$$

ossia R uguale al rapporto fra la somma delle aree di concentrazione

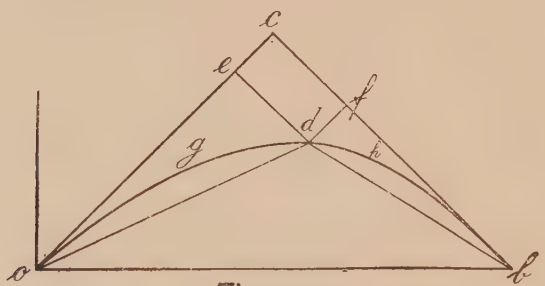


Fig. 26

delle due serie parziali, e la somma delle corrispondenti aree di massima concentrazione.

Poichè non sembra di potere escludere tale possibilità, almeno per una conveniente scelta dal punto *d*, vediamo, più generalmente, se possa verificarsi quanto è qui di seguito specificato.

Per il punto di culminazione di una curva di concentrazione *o d b* si conducano *de, df* perpendicolari a *co, cb* e le corde *do, db*.

La curva di concentrazione sarà divisa da *d* in due archi $\overset{\frown}{do}$, $\overset{\frown}{db}$ ciascuno dei quali è la curva di concentrazione di una serie, parte della serie data, la prima tronca superiormente e l'altra inferiormente.

Per i punti di culminazione *g* ed *h* dei due archi si ripetano le analoghe costruzioni, conducendo per *y* le perpendicolari *gi, gl* ad *oe, de*, e inoltre le corde *go, gd* ; e conducendo per *h* le perpendicolari *hn* ed *hm* ad *fb, fd*, e inoltre le corde *hd, hb*.

Si immagini di procedere nello stesso modo per ciascuno dei tro archi $\overline{og}$, $\overline{gd}$, $\overline{dh}$, $\overline{hb}$; e così indefinitamente.

Si viene, così, a considerare, corrispondentemente a ciascuno stadio di divisione e di suddivisione della curva primitiva mediante i punti di culminazione, una serie indefinita di aree di concentrazione corrispondenti alla serie totale e alle sue suddivisioni ; queste aree, limitate da un arco di curva e dalla sua corda, si possono indicare con :

$$obd,\ odg,\ dbh\ ;\ ogp,\ gdq,\ dhr,\ hbs\ ;\ \ldots$$

Le corrispondenti aree di concentrazione massima sono quelle dei triangoli :

$$obc\ ;\ ode,\ dbf\ ;\ ogi,\ gdl,\ dhm,\ hbn\ ;\ \ldots$$

Ciò posto ci domandiamo se potrà darsi che sia

(1) $\quad obd : (odg + dbh) : (ogp + gdq + dhr + hbs) = \ldots = k$

(2) $\quad obc : (ode + dbf) : (ogc + gde + dhm + hbn) = \ldots = k$

e quindi se potrà darsi che :

$$(3)\qquad \frac{obd}{obc} = \frac{odg + dbh}{ode + dbf} = \frac{ogp + gdq + dhr + hbs}{ogc + gde + dhm + hbn} = \ldots = R$$

essendo R il rapporto di concentrazione della serie totale.

La (3) significa che nelle ipotesi (1) e (2) la somma delle aree di concentrazione relative a uno stadio qualunque di suddivisione della curva primitiva stia alla corrispondente somma delle aree di massima concentrazione in un rapporto costante R. Il non verificarsi della (3) significherebbe che le (1) e (2) non possono sussistere ; ma la (3) non è condizione sufficiente al verificarsi delle (1) e (2).

Orbene, con alcune considerazioni di carattere intuitivo, ci si può persuadere che le ipotesi (1) e (2) (che per analogia a quella della tensione uniforme o equitensione, considerata al numero precedente, si potrebbero dire della *concentrazione uniforme* o *equiconcentrazione*), non possono realizzarsi (27). La (3) importerebbe che i singoli archi

---

(27) Invece di una curva, si consideri una poligonale di concentrazione alla quale si immagini applicato il procedimento descritto, in generale, per una curva di concentrazione.

Questa volta i punti di culminazione, in uno stadio più o meno avanzato di suddivisione della poligonale primitiva, saranno i suoi vertici, cosicchè in tale stadio la prima delle aree parziali di concentrazione sarà nulla, senza che lo sia la corrispondente somma delle aree di concentrazione massima. Nella

parziali della curva di concentrazione iniziale conservassero, rispetto alle loro corde, una convessità avente un ordine di grandezza paragonabile a quella della curva totale rispetto alla sua corda ciò che, almeno per le curve usuali, è assurdo.

Tuttavia l'ipotesi dell'equiconcentrazione, per quanto irreale, può essere utilizzata per la determinazione di un limite superiore del rapporto di concentrazione R.

Si consideri, in generale, una curva di concentrazione non culminante (fig. 27), costruita sulla solita base di lunghezza 2, e siano D

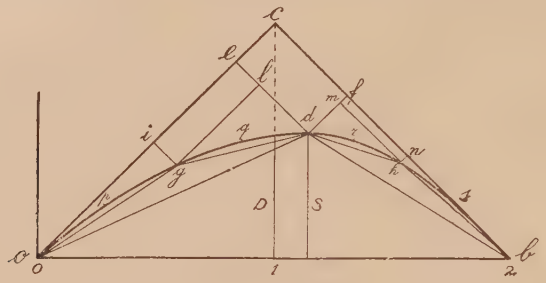


Fig. 27

l'ordinata corrispondente all'ascissa 1, S l'ordinata massima, cioè quella del punto *d* di culminazione, $1 \pm \varepsilon$ l'ascissa dello stesso punto *d*.

Si trova allora elementarmente che l'area del rettangolo *e d f c* è

$$\frac{(S-1)^2-\varepsilon^2}{2}$$

e poichè l'area del triangolo *o d b* è S, e quella di *o c b* è 1, così si deduce che l'area complessiva dei due triangoli rettangoli *ode*, *dbf* è

$$1-S-\frac{(S-1)^2-\varepsilon^2}{2}=\frac{1-S^2+\varepsilon^2}{2}.$$

La prima delle uguaglianze (3), necessarie nell'ipotesi dell'equiconcentrazione, importa quindi che sia

---

serie (3) dei rapporti considerati, il primo sarebbe $R \neq 0$, e gli altri, da uno in poi uguali a zero. Per una poligonale l'ipotesi della equiconcentrazione non può dunque sussistere. Ma il fatto è vero in generale, perchè per effetto delle successive suddivisioni gli archi parziali tendono a confondersi, con le rispettive corde, e quindi le corrispondenti aree di concentrazione tendono ad annullarsi più rapidamente delle rispettive aree di concentrazione massima.

$$\frac{obd}{1} = \frac{odg + dbh}{\frac{1 - S^2 + \varepsilon^2}{2}}$$

cioè

$$\frac{odg + dbh}{obd} = \frac{1 - S^2 + \varepsilon^2}{2}$$

e quindi dalle (1):

$$(4)\quad \frac{odg + dbh}{obd} = \frac{ogp + gdq + dhr + hbs}{odg + dbh} = \ldots = \frac{1 - S^2 + \varepsilon^2}{2}.$$

Ora sostituendo alle aree di concentrazione che via via intervengono nella (4) le aree dei triangoli di massima altezza inscritti nelle aree stesse (tali, cioè, che le basi e gli opposti vertici siano le corde e gli opposti punti di culminazione di mano in mano considerati) si avrà approssimativamente:

$$(5)\quad \frac{\triangle odg + \triangle dbh}{\triangle obd} \doteq \frac{\triangle ogb + \triangle gdq + \triangle dhr + \triangle hbs}{\triangle odg + \triangle dbh} \doteq \ldots \doteq \frac{1 - S^2 + \varepsilon^2}{2}$$

e quindi l'area di concentrazione risulterà data approssimativamente da: $\triangle odb + (\triangle odg + \triangle dbh) + (\triangle ogb + \triangle gdq + \triangle dhr + \triangle hbs) + \ldots$

da cui finalmente, essendo $\triangle obd = S$, ed $\frac{1 - S^2 + \varepsilon^2}{2} < 1$,

$$R \doteq S + S\,\frac{1 - S^2 + \varepsilon^2}{2} + S\left(\frac{1 - S^2 + \varepsilon^2}{2}\right)^2 + \ldots$$

$$(IX)\qquad R \doteq \frac{2\,S}{1 + S^2 - \varepsilon^2};$$

e se la curva è culminante, ($\varepsilon = 0$, $S = D$)

$$(IX')\qquad R \doteq \frac{2\,D}{1 + D^2}.$$

22) Insistiamo nel rilevare che le (IX) e (IX') corrispondono ad una ipotesi irreale, che implicherebbe il permanere, nelle singole parti della curva di concentrazione, di una convessità paragonabile a quella

della curva totale, mentre al crescere di quelle parti le singole convessità sono evanescenti. Perciò le (IX) e (IX′) forniscono dei limiti superiori del rapporto di concentrazione, la cui considerazione, tenuto anche conto della speditezza di determinazione, potrà talora riuscire utile.

Le (VII) e (VII′) del N° 19 corrispondevano, invece, alla ipotesi (plausibile, questa) della equitensione.

In generale, una curva di concentrazione si troverà in una condizione intermedia fra quella della equitensione e quella della equiconcentrazione, cosicchè le (VII) e (VII′) forniranno di solito valori per difetto R′ e le (IX) e (IX′) forniranno sempre valori per eccesso R″ del rapporto di concentrazione R.

Abbiamo voluto sperimentare queste previsioni teoriche sopra alcuni esempi numerici ; e a tal uopo ci siamo valsi di dati raccolti dal Dettori in *Contributo allo studio della variabilità dei prezzi* (Cagliari, 1912).

La Tabella seguente contiene per 11 diverse merci la differenza media A dei prezzi dal 1879 al 1906 (col. 1), la loro media aritmetica A (col. 2), lo scostamento semplice della media ^1S_A (col. 4) ; questi sono i soli elementi tratti dalla Tav. II (p. 48) del Dettori. Nelle col. (3) e (5) abbiamo calcolato due indici di variabilità relativi e cioè il rapporto di concentrazione R, come quoziente della differenza media pel doppio della media aritmetica e il quoziente S dello scostamento semplice medio pel doppio della media aritmetica.

La col. (6) contiene il valore R′ della (VII′) corrispondente alla ipotesi della equitensione, il quale costituirà un valore per difetto di R. La col. (7) contiene il valore R″ della (IX′) corrispondente all'ipotesi dell'equiconcentrazione, nella supposizione che la curva sia culminante ; si è applicata tale formula, e non la (IX), non conoscendosi lo scostamento ε dell'ordinata massima della curva di concentrazione dall'ordinata mediana ; il valore trovato è dunque minore di quello che si sarebbe avuto potendo applicare la (IX).

Tuttavia si trova che, in tutti i casi sperimentati i valori della col. (7) costituiscono valori R″ per eccesso e quelli della (6) valori R′ per difetto del rapporto di concentrazione R dato nella col. (3). Si può aggiungere che, nei casi stessi, il valore R è, generalmente, con buona approssimazione, la media aritmetica ponderata di R′ ed R″, coi rispettivi pesi 2 e 1.

Indici di variabilità dei prezzi di alcune merci in Italia (1879-1906).

Merce	Diff. m. Δ (1)	Media ar. A (2)	$\Delta : 2A = R$ (3)	^1S_A (Scost. sempl. medio da m. ar.) (4)	$^1S_A : 2A = S$ (5)	Ipot. equitensione $\frac{S}{1-S(1-S)} = R'$ (6)	Ipot. equiconcentr. $\frac{2S}{1+S^2} = R''$ (7)
Patate	19,25	82,32	**0,116**	12,46	0,0756	**0,08127**	**0,1503**
Pasta di frumento . .	9,83	46,12	**0,1065**	7,02	0,07610	**0,08185**	**0,1513**
Avena	14,30	172,14	**0,04153**	10,36	0,03009	**0,03099**	**0,06012**
Spirito puro importato	13,53	45,75	**0,1478**	9,29	0,1015	**0,1116**	**0,1840**
Olio d'oliva esportato .	15,16	121,14	**0,06257**	9,74	0,04020	**0,04181**	**0,08027**
Birra importata	1,52	40,68	**0,01868**	1,20	0,01474	**0,01495**	**0,02947**
Caffè	64,65	170,39	**0,1897**	48,56	0,1424	**0,1662**	**0,2791**
Petrolio	5,12	20,94	**0,1222**	3,62	0,08643	**0,09383**	**0,1715**
Acido solforico	2,13	8,41	**0,1266**	1,63	0,09690	**0,1061**	**0,1919**
Solfato d'alluminio . .	2,13	12,54	**0,0849**	1,70	0,0677	**0,07226**	**0,1347**
Rame, ottone, bronzo .	33,90	147,32	**0,1150**	24,68	0,08376	**0.09072**	**0,1663**

Riassunto.

Richiamate le semplici relazioni che intercedono fra le diverse curve di distribuzione di un carattere (curve di frequenza, curve di graduazione, curve di concentrazione) in quanto che ciascuna di queste ultime due si può dedurre dalla sua precedente mediante una integrazione, ci siamo particolarmente soffermati, come scopo principale della presente Memoria, sullo studio delle curve di concentrazione, prendendo le mosse dai risultati di nostre precedenti ricerche in argomento.

In primo luogo abbiamo indagato, ed anche sperimentato su esempi numerici, il diverso grado di approssimazione che può essere raggiunto nella determinazione dell'area e quindi del rapporto di concentrazione R, applicando la formula di quadratura di Cotes per valori equidistanti di p (percentuale del numero dei termini aventi un valore del carattere non superiore a v, sul numero totale dei termini), oppure per valori equidistanti di q (percentuale sull'ammontare totale del carattere, della quantità di carattere globalmente posseduta dai termini in cui esso non supera il valore v). Tale confronto ci ha indotto a proporre, nell'intento di dividere la curva di concentrazione in parti meno disuguali di quanto non risulti coi metodi precedenti, e quindi per avere una migliore approssimazione sistematica nel calcolo di R con la formula di Cotes, una rappresentazione analitica delle curve di concentrazione diversa dalla consueta.

Tale rappresentazione consiste nell'assumere come asse delle ascisse x la retta di equidistribuzione, come asse delle ordinate y la perpendicolare a tale retta, e come unità di misura non già l'intervallo di variazione di p (e di q), ma la metà dell'ipotenusa del triangolo di massima concentrazione (retta di equidistribuzione). Le semplicissime formule di trasformazione delle consuete nelle nuove coordinate sono $x = p + q$, $y = p - q$; e il riferimento al nuovo sistema risulta, dagli esempi, effettivamente più conveniente per il calcolo di R, rispetto alla equidivisione di p o rispetto alla equidivisione di q, in tre casi su quattro. Nel seguito della memoria si è sistematicamente impiegato il nuovo sistema di riferimento.

Procedendo nell'esame delle curve di concentrazione, ne abbiamo in secondo luogo, considerate alcune caratteristiche qualitative e quantitative : queste ultime in parte già segnalate dal Pietra, e costituite dalla interpretazione analitica di talune (quattro) particolari ordinate della curva. L'interpretazione analitica di una particolare ordinata ci ha condotto a introdurre il concetto di *antiserie* di una serie data, e

tale concetto si è dimostrato fecondo di successive applicazioni, dipendenti dalla circostanza che fra una serie e la sua antiserie intercedono molteplici relazioni, e, fra le altre, quella, assai notevole, di possedere, salvo una diversa orientazione, la stessa curva di concentrazione.

In terzo luogo, completando una osservazione che avevamo già avuto occasione di fare in una Memoria precedente, abbiamo mostrato quali modificazioni (e precisamente contrazioni) subisca il triangolo di massima concentrazione quando, anzichè supporre come si fa solitamente, che l'intensità del carattere che dà luogo alla serie possa assumere valori positivi qualunque, si supponga invece che essa intensità abbia un limite superiore, oppure un limite inferiore, oppure un limite superiore ed uno inferiore ; ed abbiamo altresì determinato quali coefficienti di correzione siano in questi casi da introdurre nel rapporto di concentrazione per tener conto delle dette limitazioni, ossia per tener conto che la effettiva area di concentrazione non va riferita al solito triangolo rettangolo, ma ad un triangolo di minore estensione

Questa eventuale contrazione del triangolo di massima concentrazione conduce a porre una interessante serie di problemi, e cioè quelli di trasformare le curve di concentrazione corrispondenti ai tre casi di limitazione del carattere, in altre curve che siano riferibili, per la determinazione del rapporto R, al solito triangolo rettangolo di massima concentrazione. Tali trasformazioni, nelle quali trovano applicazione tutti i concetti precedentemente esposti, e in particolare quello di antiserie, sono date in una serie di esempi numerici.

Un altro problema al quale ci siamo successivamente applicati è stato quello di sperimentare l'interpolazione della curva di concentrazione, riferita al solito sistema di assi da noi proposto, non già in base base alle ordinate in punti equidistanti della retta di equidistribuzione, ma mediante le ordinate caratteristiche di cui abbiamo sopra fatto cenno (e le rispettive ascisse). La sperimentazione è stata eseguita su due esempi numerici.

Infine, allo scopo di indagare altri procedimenti interpolatorî particolarmente idonei per le curve di concentrazione, abbiamo approfondito l'esame della loro forma, e, in base alle distinzioni ottenute, abbiamo esposto ed esemplificato alcune corrispondenti formule interpolatrici.

Il lavoro si chiude con l'esposizione di due nuovi concetti riferentisi alle curve di concentrazione : quello della *tensione uniforme* o *equitensione*, e quello della *concentrazione uniforme* o *equiconcentrazione*.

Il primo può effettivamente essere realizzato in talune curve di

concentrazione e per tali curve è allora possibile sia calcolare l'area di concentrazione, sia stabilire un limite superiore della differenza tra il valore numerico del rapporto di concentrazione e quello di alcune ordinate caratteristiche.

Il secondo corrisponde, invece, ad una condizione limite che non può essere verificata in nessuna curva di concentrazione : tuttavia il concetto stesso permette di eseguire speditamente una valutazione per eccesso del rapporto di concentrazione fondandosi sullo scostamento semplice medio.

D'altronde il concetto della equitensione, qualora non sia realizzato in una curva di concentrazione, conduce, sulla stessa base, a una valutazione per difetto del rapporto stesso ; così che i due concetti permettono, dallo scostamento semplice medio, di risalire a due limiti fra i quali è compreso il rapporto di concentrazione.

Résumé.

Après avoir rappelé les simples relations qui passent entre les différentes courbes de distribution d'un caractère donné (courbes de fréquence, de graduation, de concentration) grâce auxquelles chacune des deux dernières peut être déduite de la courbe précédente moyennant l'intégration, nous avons donné une attention particulière à l'étude des courbes de concentration qui forment l'objet principal de ce Mémoire, en prenant pour point de départ les résultats de nos recherches précédentes à ce sujet.

En premier lieu, nous avons recherché, en recourant aussi à des expériences sur des exemples numériques, les divers degrés d'approximation que l'on peut atteindre pour la détermination de la surface et du rapport de concentration R. Nos recherches ont été faites en appliquant d'abord la formule de Cotes pour des valeurs à distance égale de p (pourcentage du nombre des termes, ayant un valeur du caractère donné ne dépassant pas v, par rapport au nombre total des termes), ou bien pour des valeurs à distance égale de q (pourcentage, par rapport à la valeur totale du caractère, de la quantité de caractère possédée par les termes où il ne dépasse pas la valeur v). Ces comparaison nous ont conduits à proposer ensuite une représentation analytique d'une courbe de concentration différente de celle qui est ordinairement employée, et cela dans le but de diviser la courbe de concentration en parties moins inégales entre elles que celles qu'on obtient avec les méthodes précédentes, et d'atteindre ainsi une approximation systématique plus exacte dans le calcul de R au moyen de la formule de Cotes.

Cette représentation consiste à prendre pour axe des abscisses x la ligne droite représentant la distribution uniforme et pour axe des ordonnées y la perpendiculaire à cette ligne droite ; en même temps on adoptera comme unité de mesure, au lieu de l'intervalle de variation de p (et de q), ordinairement employé à cet effet, la moitié de l'hypoténuse du triangle représentant le maximum de concentration (ligne droite de distribution uniforme). Les formules très simples pour la transformation des coordonnées usuelles en coordonnées nouvelles sont : $x = p + q$ et $y = p - q$; et l'application du nouveau système est, comme le démontrent les exemples, effectivement plus convenable pour le calcul de R, soit par rapport à la division en parties égales de p, soit par rapport à celle de q, dans trois cas sur quatre. Cette nouvelle méthode de représentation de la courbe de concentration a été systématiquement appliquée dans la suite de ce Mémoire.

En poursuivant l'étude des courbes de concentration, nous avons considéré, en second lieu, certains caractères qualitatifs et quantitatifs de ces courbes ; quelques-uns d'entre ces derniers avaient déjà été signalés par Pietra. Ils se réduisent à interpréter par l'analyse plusieurs (quatre) ordonnées particulières de la courbe. L'interprétation analytique d'une ordonnée particulière nous a porté à introduire le concept d'*antisérie* d'une série donnée, et ce concept s'est trouvé susceptible d'autres applications successives, dépendant de la circonstance qu'entre une série et son antisérie interviennent des relations multiples et, entre autre, celle aussi très importante de posséder, sauf orientation diverse, la même courbe de concentration.

Troisièmement, nous avons montré, en complétant une observation que nous avions déjà eu l'occasion de faire dans un Mémoire antérieur, quelles modifications (et plus précisément quelles contractions) sont subies par le triangle représentant le maximum de concentration, lorsqu'au lieu de supposer, comme d'ordinaire, que l'intensité du caractère puisse assumer des valeurs positives quelconques, on suppose, au contraire, que cette intensité ait une limite supérieure, ou bien une limite inférieure, ou bien encore une limite supérieure en même temps qu'une autre inférieure. Nous avons encore déterminé quels sont les coefficients de correction à introduire, dans ces cas, dans le rapport de concentration afin de tenir compte des dites limites, *c. a. d.* pour prendre en considération la circonstance que la surface de concentration effective ne se rapporte pas au triangle rectangulaire ordinaire, mais à un triangle plus petit.

Cette contraction éventuelle du triangle représentant le maximum

de concentration nous amène à poser une série de problèmes intéressants, à savoir ceux de transformer les courbes de concentration correspondantes au trois cas de limitation du caractère en d'autres courbes qui puissent se rapporter, pour la détermination de R, au triangle rectangulaire usuel représentant le maximum de concentration. Ces transformations, dans lesquelles tous les principes que nous avons exposés trouvent leur application — entre autres et plus particulièrement celui d'antisérie — sont effectuées pour une série d'exemples numériques.

Un autre problème auquel nous nous sommes successivement appliqués est celui d'essayer l'interpolation de la courbe de concentration rapportée au système d'axes que nous avons proposé, non point sur la base des ordonnées qui divisent en parties égales la droite de distribution uniforme, mais sur la base des ordonnées caractéristique mentionnées ci-dessus (et leurs abscisses respectives). L'essai a été fait pour deux exemples numériques.

Enfin, dans le dessein de rechercher d'autres procédés d'interpolation particulièrement convenables pour les courbes de concentration, nous avons fait un examen approfondi de leur forme, et sur la base des distinctions obtenues nous avons donné et expliqué au moyen d'exemples quelques formules d'interpolation correspondantes.

L'étude se termine par l'exposé de deux noveaux concepts concernant les courbes de concentration : celui de la *tension uniforme* et celui de la *concentration uniforme.*

Le premier peut être effectivement réalisé par certaines courbes de concentration, qui donnent dans ce cas la possibilité soit de calculer l'aire de concentration, soit de déterminer une des limites supérieures des différences entre la valeur numérique du rapport de concentration et celui de certaines ordonnées caractéristiques.

Le second correspond, au contraire, à une condition-limite qui ne peut pas être réalisée par aucune courbe de concentration : cependant le concept permet par lui-même d'exécuter rapidement le calcul par excès du rapport de concentration fondé sur l'écart moyen de la moyenne. D'ailleurs si le concept de la tension uniforme n'est pas réalisé par une courbe de concentration, il aboutit, en se basant sur le même écart précité, à un calcul par défaut du même rapport ; cela fait que les deux concepts permettent de remonter de l'écart moyen de la moyenne à deux limites entre lesquelles se trouve compris le rapport de concentration.

G. PIETRA

Dell'interpolazione parabolica nel caso in cui entrambi i valori delle variabili sono affetti da errori accidentali

1. — In una mia nota sulla interpolazione parabolica (1) nel caso in cui entrambe le variabili siano affette da errori accidentali di osservazione, ho determinato i parametri della curva interpolatrice apportando alle formule ottenute col metodo dei minimi quadrati opportune correzioni in funzione della somma dei quadrati degli errori della variabile indipendente.

Avvertivo allora che, siccome il più delle volte tale somma non è nota o non è facile a stabilirsi a priori, mentre si è invece molto più spesso in grado di conoscere il valore del rapporto fra le somme dei quadrati degli errori delle due variabili, avrei in altra occasione offerto le formule per la determinazione dei parametri della parabola interpolatrice, nel caso fosse appunto noto soltanto tale rapporto.

L'analogo problema per la più semplice interpolazione lineare era stato già in precedenza risolto dal GINI (2) mediante un procedimento valevole però solo per il caso particolare della retta.

Io mi servirò, invece, di un procedimento valevole in generale per l'interpolazione di una parabola di ordine qualunque e, mentre ritroverò così la formula del GINI per l'interpolazione lineare, determinerò quella per la parabola ordinaria, facendone anche una semplice applicazione.

(1) G. PIETRA. *Interpolating plane curves.* « Metron », Vol. III, N. 3-4, 1924.

(2) C. GINI. *Sulla interpolazione di una retta quando i valori della variabile indipendente sono affetti da errori accidentali.* « Metron », Vol. I. N. 3, 1921.

2. — Siano y_i' e x_i' $(i = 1, 2, 3, \ldots n+1)$ i valori osservati delle coordinate di un gruppo P di $n+1$ punti del piano affetti rispettivamente degli errori accidentali λ_i ed ε_i.

Sia

$$\bar{y}_i' = y_i' - A_{y_i'} \quad , \quad \bar{x}_i' = x_i' - A_{x_i'}$$

dove $A_{y_i'}$ e $A_{x_i'}$ sono rispettivamente le medie aritmetiche di y_i' e x_i' Siano. α_s $(s = 0, 1, 2, \ldots, n)$ gli $n+1$ parametri della parabola

$$\bar{y} = \sum_0^n \alpha_s \bar{x}^s \tag{1}$$

determinati in funzione dei valori osservati $\bar{y}_i'$ $\bar{x}_i'$ e della $\sum_1^{n+1} \varepsilon_i^2$ — somma dei quadrati degli errori accidentali della $\bar{x}_i$ considerata come variabile indipendente — secondo le formule da noi date nel nostro più sopra citato articolo.

Si supponga di conoscere in luogo di $\sum_1^{n+1} \varepsilon_i^2$ soltanto il rapporto

$$\frac{\sum_1^{n+1} \varepsilon_i^2}{\sum_1^{n+1} \lambda_i^2} = k \tag{2}$$

e per semplicità di scrittura si ponga

$$\sum_1^{n+1} \lambda_i^2 = z$$

e quindi

$$\sum_1^{n+1} \varepsilon_i^2 = k\, z\,.$$

Ora se, per un momento, ammettiamo di conoscere il valore esatto $\bar{x}_i$ delle $\bar{x}_i'$ noi sappiamo che deve essere

$$z = \sum_1^{n+1} \left(\bar{y}_i' - \sum_0^n \alpha_s \bar{x}^s \right)^2 \tag{3}$$

e poichè il secondo membro di questa espressione può essere espresso in funzione di $\bar{y}_i'$, $\bar{x}_i'$ e del prodotto kz, dalla (3) stessa noi potremo ricavare, in funzione di valori tutti noti, il valore di z e quindi di kz cioè $\sum_1^{n+1} \varepsilon_i^2$; tale valore sostituiremo allora nei parametri α_s della (1)

la quale sarà così pienamente determinata in funzione di $\bar{y}_i'$, $\bar{x}_i'$ e k, ed il nostro problema sarà così risolto.

3. — Ciò posto veniamo alla esecuzione pratica delle operazioni ora accennate e cominciamo dalla interpolazione lineare.

Ricordiamo anzitutto che qualora del gruppo di $n+1$ punti P considerato nel numero precedente si conoscano le coordinate affette da errori accidentali e le somme dei quadrati di tali errori, secondo il GINI le note formule che dànno i parametri della retta

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

interpolata col metodo dei minimi quadrati vengono corrette opportunamente in funzione di $\sum_1^{n+1} \varepsilon_i^2$ per modo che si ha:

$$\alpha_1 = \frac{\Sigma \bar{x}_i' \bar{y}_i'}{\Sigma \bar{x}_i'^2 - \Sigma \varepsilon_i^2} \qquad (4)$$

$$\alpha_0 = A_{y_i'} - \alpha_1 A_{x_i'} .$$

Se ora invece di $\sum_1^{n+1} \varepsilon_i^2$ si conoscesse solo il rapporto (2), la (3) nel nostro caso diventerebbe

$$z = \sum_1^{n+1} (\bar{y}_i' - \alpha_0 - \alpha_1 \bar{x}_i)^2$$

e poichè è:

$$\Sigma \bar{x}_i \bar{y}_i' = \Sigma \bar{x}_i' \bar{y}_i'$$

$$\Sigma \bar{x}_i^2 = \Sigma \bar{x}_i'^2 + \Sigma \varepsilon_i^2 = \Sigma \bar{x}_i'^2 + kz$$

si avrà, tenendo conto della (4)

$$z = \Sigma \bar{y}_i'^2 - \frac{(\Sigma \bar{x}_i' \bar{y}_i')^2}{\Sigma \bar{x}_i'^2 - kz} \qquad (5)$$

e pertanto:

$$kz^2 - [k \Sigma \bar{y}_i'^2 + \Sigma \bar{x}_i'^2] z + \Sigma \bar{x}_i'^2 \Sigma \bar{y}_i'^2 - (\Sigma \bar{x}_i' \bar{y}_i')^2 = 0$$

dalla quale si ricavano due valori di z e quindi di kz, cioè di $\Sigma \varepsilon_i^2$ in funzione di $\bar{y}_i'$, $\bar{x}_i'$ e k. Sostituendo nella (4) quello di questi due valori che risulta reale e positivo avremo il valore di α_1, che cerchiamo e che è dato anche dalla prima delle due formule (20) contenute nell'articolo già citato del GINI.

4. — Passiamo ora alla interpolazione parabolica e serviamoci per comodità di scrittura delle stesse lettere e simboli usati per l'interpolazione lineare tenendo presente che, naturalmente, il loro significato ed il loro valore saranno diversi e daranno quindi luogo a risultati generalmente diversi.

Se la curva interpolatrice è rappresentata dalla

$$\bar{y} = \alpha_0 + \alpha_1 \bar{x} + \alpha_2 \bar{x}^2 \tag{6}$$

io ho trovato (1) che nel caso in cui si conoscano i valori $\bar{y}'_i$ ed $\bar{x}'_i$, entrambi affetti da errori accidentali e le somme $\Sigma \lambda_i^2$, $\Sigma \varepsilon_i^2$, dei quadrati di tali errori, i parametri della (6) sono dati dalle seguenti formule:

$$\alpha_2 = \frac{\Sigma \bar{x}'^2_i - \dfrac{\Sigma \bar{x}'_i \bar{y}'_i}{\Sigma \bar{x}'^2_i - \Sigma \varepsilon_i^2} \Sigma \bar{x}'^3_i}{\Sigma \bar{x}'^4_i - \dfrac{(\Sigma \bar{x}'^2_i)^2}{n} - \dfrac{2 \Sigma \varepsilon_i^2 (2 \Sigma \bar{x}'^2_i - \Sigma \varepsilon_i^2)}{n} - \dfrac{(\Sigma \bar{x}'^3_i)}{\Sigma \bar{x}'^2_i - \Sigma \varepsilon_i^2}}$$

$$\alpha_1 = \frac{\Sigma \bar{x}'_i \bar{y}'_i - \alpha_2 \Sigma \bar{x}'^3_i}{\Sigma \bar{x}'^2_i - \Sigma \varepsilon_i^2} \tag{7}$$

$$\alpha_0 = \alpha_2 \frac{\Sigma \bar{x}'^2_i - \Sigma \varepsilon_i^2}{n} .$$

Supponendo ora che in luogo di $\Sigma \lambda_i^2$ e di $\Sigma \varepsilon_i^2$ sia noto soltanto il rapporto (2), se per un momento ammettiamo di conoscere il valore esatto $\bar{x}_i$ delle $\bar{x}'_i$, nel caso della interpolazione parabolica la (3) diventa:

$$z = \Sigma (\bar{y}'_i - \alpha_0 - \alpha_1 \bar{x}_i - \alpha^2 \bar{x}_i^2)^2 . \tag{8}$$

Siccome poi (2) è:

$$\Sigma \bar{x}_i \bar{y}'_i = \Sigma \bar{x}'_i \bar{y}'_i \; ; \; \Sigma \bar{x}'^2_i = \Sigma \bar{x}_i^2 + \Sigma \varepsilon_i^2 = \Sigma \bar{x}_i^2 + k z$$

$$\Sigma \bar{x}_i^2 \varepsilon_i^2 = \frac{1}{n} \left[\Sigma \bar{x}'^2_i - (\Sigma \varepsilon_i^2)^2 \right] = \frac{1}{n} \left[\Sigma \bar{x}'^2_i - k^2 z^2 \right] ;$$

$$\Sigma \varepsilon_i^4 = \frac{3}{n} (\Sigma \varepsilon_i^2)^2 = \frac{3}{n} k^2 z^2$$

---

(1) Cfr. G. PIETRA. Op. cit.
(2) Cfr. G. PIETRA. Op. cit.

ponendo per semplicità di scrittura:

$$\Sigma \bar{y}_i'^2 = a_1 \; ; \; \Sigma \bar{x}_i'^2 = a_2 \; ; \; \Sigma \bar{x}_i'^4 = a_3 \; ;$$

$$\Sigma \bar{x}_i' \bar{y}_i' = a_4 \; ; \; \Sigma \bar{x}_i'^2 \bar{y}_i' = a_5 \; ; \; \Sigma \bar{x}_i'^3 = a_6$$

la (8) diventa

$$z = a_1 + n\alpha_0^2 + \alpha_1^2 (a_2 - kz) + \alpha_2^2 \left\{ a_3 - \frac{2a_2 + k^2 z^2}{n} \right\} - 2\alpha_1 a_4 -$$

$$- 2\alpha_2 a_5 + 2\alpha_0 \alpha_2 (a_2 - kz) + 2\alpha_0 \alpha_2 a_6$$

e sostituendo ad α_0, α_1 e α_2 i valori dati dalle (7), dopo laboriosissimi sviluppi e passaggi, si perviene alla seguente equazione di ottavo grado in z

$$P_8 z^8 + P_7 z^7 + P_6 z^6 + P_5 z^5 + P_4 z^4 + P_3 z^3 + P_2 z^2 + P_1 z + P_0 = 0 \quad (9)$$

nella quale è:

$$P_8 = -4nk^7$$

$$P_7 = 4nk^6 (7a_2 + ka_1)$$

$$P_6 = 4nk^5 (-18a_2^2 - na_3 - 7ka_1 a_2 + ka_2^4)$$

$$P_5 = 4nk^4 (k\{18a_1 a_2^2 + na_1 a_3 - 6a_2 a_4^2 + 2na_5^2\} + 20a_2^3 + 5na_2 a_3 - na_6^2)$$

$$P_4 = nk^3 (k\{-80a_1 a_2^3 - 20na_1 a_2 a_3 + 48a_2^2 a_4^2 + 4na_1 a_6^2 + 4na_3 a_4^2 - 36na_2 a_5^2 + 16na_4 a_5 a_6\} - 29a_2^4 - 34na_2^2 a_3 - n^2 a_3^2 + 16na_2 a_6^2)$$

$$P_3 = nk^2 (k\{29a_1 a_2^4 + 34na_1 a_2^2 a_3 + n^2 a_1 a_3^2 - 32a_2^3 a_4^2 - 16na_1 a_2 a_6^2 - 16na_2 a_3 a_4^2 + 12na_4^2 a_6^2 + 61na_2^2 a_5^2 - 56na_2 a_4 a_5 a_6 + n^2 a_3 a_5^2\} - 9a_2^5 + 22na_2^3 a_3 + 3n^2 a_2 a_3^2 - 18na_2^2 a_6^2 - 2n^2 a_3 a_6^2)$$

$$P_2 = nk(k\{9a_1 a_2^5 - 22na_1 a_2^3 a_3 - 3n^2 a_1 a_2 a_3^2 + 18na_1 a_2^2 a_6^2 - 3a_2^4 a_4^2 + 18na_2^2 a_3 a_4^2 + 2n^2 a_1 a_3 a_6^2 + n^2 a_3^2 a_4^2 - 12na_2 a_4^2 a_6^2 - 47na_2^3 a_5^2 - 20na_2 a_4^2 a_6^2 + 66na_2^2 a_4 a_5 a_6 - 3n^2 a_2 a_3 a_5^2 + 2n^2 a_3 a_4 a_5 a_6 + n^2 a_5^2 a_6^2\} - 2na_2^4 a_3 + 5a_2^6 + 4na_2^3 a_6^2 - 3n^2 a_2^2 a_3^2 + 4n^2 a_2 a_3 a_6^2 - n^2 a_6^4)$$

$$P_1 = n\,(k\,\{2\,n\,a_1\,a_2^4\,a_3 - 5\,a_1\,a_2^6 + 3\,n^2\,a_1\,a_2^2\,a_3^2 - 4\,n\,a_1\,a_2^3\,a_6^2 - \\ - 4\,n\,a_2^3\,a_3\,a_4^2 - 4\,n^2\,a_1\,a_2\,a_3\,a_6^2 - 2\,n^2\,a_2\,a_3^2\,a_4^2 + 6\,n\,a_2^2\,a_4^2\,a_6^2 + \\ + n^2\,a_1\,a_6^2 + 2\,n^2\,a_3\,a_4^2\,a_6^2 + 15\,n\,a_2^4\,a_5^2 - 28\,n\,a_2^3\,a_4\,a_5\,a_6 + \\ + 13\,n\,a_2^2\,a_4^2\,a_6^2 + 3\,n^2\,a_2^2\,a_3\,a_5^2 - 4\,n^2\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_6 + n^2\,a_3\,a_4^2\,a_6^2 - \\ - 2\,n^2\,a_2\,a_5^2\,a_6^2 + 2\,n^2\,a_4\,a_5\,a_6^3\} + n^2\,a_3^2\,a_2^3 + a_2^7 - 2\,n\,a_2^5\,a_3 - \\ - 2\,n^2\,a_2^2\,a_3\,a_6^2 + 2\,n\,a_2^4\,a_6^2 + n^2\,a_2\,a_6^4 + 6\,a_2^5\,a_4^2)$$

$$P_0 = n\,(-n^2\,a_1\,a_2^3\,a_3^2 - a_1\,a_2^7 + 2\,n\,a_1\,a_2^5\,a_3 + 2\,n^2\,a_1\,a_2^2\,a_3\,a_6^2 - \\ - 2\,n\,a_1\,a_2^4\,a_6^2 + n^2\,a_2^2\,a_3^2\,a_4^2 + a_4^2\,a_6^2 - 2\,n\,a_2^4\,a_3\,a_4^2 - n^2\,a_1\,a_2\,a_4^4 - \\ - 3\,n^2\,a_2\,a_3\,a_4^2\,a_6^2 + n\,a_2^3\,a_4^2\,a_6^2 - n\,a_2^5\,a_5^2 + 2\,n\,a_2^4\,a_4\,a_5\,a_6 - \\ - n^2\,a_2^3\,a_3\,a_5^2 + 2\,n^2\,a_2^2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_6 + n^2\,a_2^2\,a_3^2\,a_6^2 - 2\,n^2\,a_2\,a_4\,a_5\,a_6^3)$$

È noto che non esistono formule di risoluzione per equazioni di grado superiore al quarto; l'algebra complementare però insegna i criteri che si devono seguire per addivenire lo stesso, in ogni singolo caso concreto, alla determinazione delle radici, con quell'approssimazione che si desidera.

Ottenute queste sceglieremo fra esse quelle reali e positive, le moltiplicheremo per k e sostituiremo successivamente questi prodotti a $\Sigma\,\varepsilon_i^2$ nelle (7), che ci daranno così i parametri di altrettante parabole in funzione di $\bar{x}_i'$, $\bar{y}_i'$ e di k, soddisfacenti al nostro problema.

5. — Data la mole delle elaborazioni che si richiederebbero per fare una applicazione pratica del caso generale testè considerato, limitiamo l'esemplificazione ad un caso più semplice, cui del resto il caso generale si riduce quando è possibile trasferire le coordinate $\bar{x}\ \bar{y}$ della parabola (6) ad un sistema di assi X, Y aventi per origine

$$\bar{x} = -\frac{\alpha_1}{2\,\alpha_2}\ ;\ \bar{y} = \frac{4\,\alpha_0\,\alpha_2 - \alpha_1^2}{4\,\alpha_2}\ .$$

Allora la (6) diventa

$$Y = \alpha_2\,X^2$$

che, per semplicità, scriveremo con le lettere precedenti

$$\bar{y} = \alpha_2\,\bar{x}^2 \qquad (10)$$

In tal caso le (7) si riducono alla

$$\alpha_2 = \frac{\Sigma\, \overline{x_i'}^2\, \overline{y_i'}}{\Sigma\, \overline{x_i'}^4 - \frac{3}{n}(\Sigma\, \varepsilon_i)^2 - \frac{2}{n}(\Sigma\, \overline{x_i'}^2 - \Sigma\, \varepsilon_i^2)\, \Sigma\, \varepsilon_i^2} \qquad (11)$$

e la (8) diventa

$$z = \Sigma\, (\overline{y_i'} - \alpha_2\, \overline{x_i'}^2)^2 .$$

Allora, servendoci delle stesse lettere del caso generale, dopo opportuni passaggi, arriveremo alla

$$z = a_1 - \frac{a_5}{a_3 - \frac{2}{n}\, a_2 - \frac{k^2 z^2}{n}}$$

dalla quale ponendo

$$a_3 - \frac{2}{n}\, a_2 = b$$

avremo facilmente l'equazione di terzo grado in z

$$k^2 z^3 - a_1 k^2 z^2 - n\, b\, z - n\, (a_5 + a_1 b) = 0 . \qquad (12)$$

Risolta questa equazione, metteremo i valori reali e positivi di $k\, z$, cioè di $\Sigma\, \varepsilon_i^2$ nella (11) per modo che avremo il valore di α_2 in funzione di $\overline{x_i'}\, \overline{y_i'}$ e k, ciò che appunto si desiderava ottenere.

6. — Supponiamo, p. e., che i nostri simboli abbiano i seguenti valori numerici:

$$\Sigma\, \overline{y_i'}^2 = 10 \qquad n = 10$$

$$\Sigma\, \overline{x_i'}^2\, \overline{y_i'} = -\frac{6}{5}$$

$$\Sigma\, \overline{x_i'}^4 - \frac{2}{10}\, \Sigma\, \overline{x_i'}^2 = \frac{1}{10}$$

$$\text{e sia } k = \frac{1}{3}$$

allora la (12) diventa:

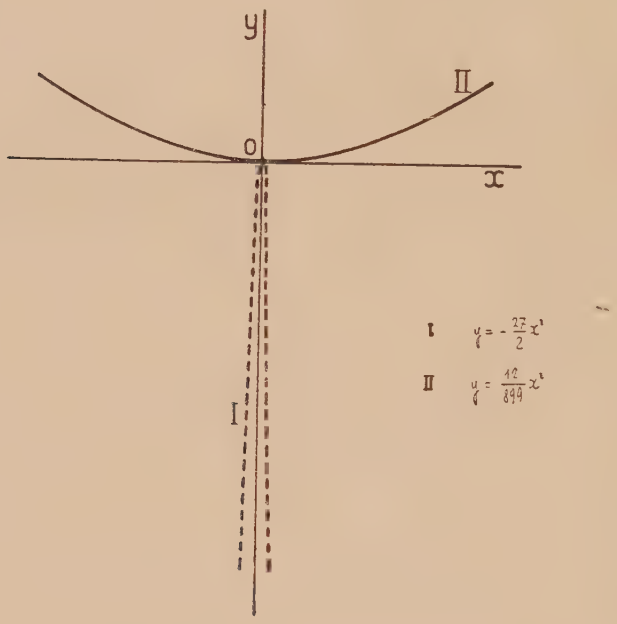
$$\frac{z^3}{9} - \frac{10}{9}\, z^2 - z + 2 = 0 . \qquad (13)$$

Se invece si pone $K = 3$ si ha la

$$9\,z^3 - 90\,z^2 - z + 2 = 0 \qquad (14)$$

la (13) risolta dà per radice reale

$$z = 1 .$$



Sarà quindi

$$\Sigma\,\varepsilon_i^2 = \frac{1}{3}$$

e quindi la (11) diventa

$$\alpha_2 = -\frac{27}{2} . \qquad (15)$$

Risolvendo invece la (14) si ha per z il valore approssimato 10,01 ; che possiamo senz'altro sostituire con

$$z = 10$$

d'onde

$$\Sigma\,\varepsilon_i^2 = 30$$

e perciò la (11) diventa

$$\alpha_2 = + \frac{12}{899} \tag{16}$$

avremo così dalla (10) a seconda che $k = \frac{1}{3}$ o $k = 3$ le due parabole

$$y = - \frac{27}{2} x^2 \; ; \; y = \frac{12}{899} x^2$$

le quali, come lo prova anche il grafico, hanno un comportamento del tutto diverso l'una dall'altra, confermando quanto abbiamo osservato nel nostro articolo più volte citato, che, cioè, l'influenza degli errori della variabile indipendente può invertire completamente la direzione della concavità della parabola interpolatrice — e ciò anche nel caso in cui si conosca non più la somma dei quadrati degli errori della variabile indipendente, ma soltanto il rapporto delle somme dei quadrati degli errori delle due variabili.

SAMUEL S. WILKS

On the distributions of statistics in samples from a normal population of two variables with matched sampling of one variable

I. — Introduction

In certain types of statistical investigations of the experimental sciences, the problem often arises of estimating the effect of varying a factor or a group of factors related to the experiment. Ordinarily, the investigator of such problems is obliged to conduct his experiment in such a way that certain potent and irrelevant factors are held constant during the experiment. An important aspect of his problem consists in devising a technique whereby the effect of the variable factors can be estimated and interpreted in terms of certain standardized or normal values of these factors. The device used in many experiments of this nature is to select two groups of material in such a way as to make them practically identical as far as the fixed factors are concerned. One group is subjected to the effect of normal or standardized values of the variable factors, while the other is subjected to certain experimental values of the same variables.

As an example of such a problem let us consider a simple one in the science of dietetics. Suppose it is desired to find the effect of a certain type of diet on the weight of men of a certain age in a typical American university. It is well known that there is considerable correlation between weight and height and it will be desirable to eliminate the factor of height as far as possible. This may be done by taking two groups, such that for each man of a certain height in one group, there is a man of the same height in the second group. Sup-

pose the heights are matched independently of the weights. Let the first group be placed on a standardized or normal diet, and let the second group be placed on the experimental diet for the desired length of time. After the experiment, certain statistics (*) are calculated from the weights of the two groups. Now, the question arises as to what criteria of significance should be used on the difference in the corresponding statistics of the two groups. It is fairly obvious that the criteria for the significance of such differences in ordinary random sampling are not applicable, because although one of the groups might have been drawn at random from the men of the particular university under consideration, the other group is restricted in that its distribution of heights is made identical with that of the first group, and inasmuch as height and weight are correlated, the weights of the second group cannot be considered as purely randomly distributed.

Numerous other examples in almost any field of experimental science could be cited of the same general character, but the one just given will perhaps be sufficient to suggest the following mathematical abstraction : Suppose two correlated variates x, y are normally distributed and that samples of s are drawn from this population in such a way that the distribution of the x's is made identical item by item, with a given distribution which may be random or arbitrary, independently of the y's. A fundamental problem arises concerning the sampling fluctuations of the statistics pertaining to the y's.

In a previous paper (**), the author derived an expression for the standard error of the mean of the unmatched variate for such sampling. The method used in this derivation however, is far less powerful than that employed in the derivations in the present paper. In the paper just cited, the method used was such as to lead only to the finding of an expression for the standard error of the mean of the unmatched variate, whereas, in the present paper, expressions have been found for the distribution of the mean, standard deviation, correlation coefficient, and other important statistics pertaining to the unmatched variate, for the case of a normally distributed parent-population. These distributions were derived by means of the el-

(*) By a statistic, we mean any function of the variates drawn in a sample, e. g., mean, standard deviation, etc.

(**) *On the Standard Error of the Mean in Matched Samples*, « Journal of Educational Psychology », Vol. XXII, No. 3.

egant method of ROMANOVSKY (*) involving the use of integral equations.

The essential nature of this method for the case of one variate is as follows: Suppose the variate x is distributed according to the normal law

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-x_0)^2}$$

and let w be any statistic belonging to a sample of s items drawn at random from this population, which can be expressed as a linear or quadratic form in the s variates x_i $(i = 1, 2, \ldots s)$.

Let $\varphi(\alpha)$ be a function defined by the relation,

$$\varphi(\alpha) = \lambda^s \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau+\alpha w}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_s$$

where the integrals are s in number, and

$$-\tau = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{s}(x_i - x_0)^2\ ,\quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\ .$$

This integral and the continuity of $\varphi(\alpha)$ can be shown to exist for sufficiently small values of α. Then it is evident that

$$\left[\frac{d^h\varphi(\alpha)}{d\alpha^h}\right]_{\alpha=0} = M_h$$

where M_h is the h-th moment of w. Thus, we are only interested for values of α in the neighborhood of $\alpha = 0$.

Now, the distribution $F(w)$ of w is given as the solution of the integral equation

$$\int_a^b e^{\alpha w}\, F(w)\, d\, w = \varphi(\alpha)$$

where a and b depend on the nature of w. For the ordinary statistics such as means, standard deviations and product moments (for two or more variables), all of the moments exist and the uniqueness of

---

(*) V. ROMANOVSKY. *On the Moments of the Standard Deviation and of the Correlation Coefficient in Samples from a Normal Population*, «Metron», No. 4, Vol. 5, 1925.

$F(w)$ can be demonstrated by the application of STEKLOFF's (*) theory of closure.

Similarly, the simultaneous distribution $\Phi(u, v)$ of two statistics u, v of the nature of w would be found as the solution of the integral equation,

$$\int_a^b \int_c^d e^{\alpha u + \beta v} \Phi(u, v)\, du\, dv = \varphi(\alpha. \beta)$$

where

$$\varphi(\alpha, \beta) = \lambda^s \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau + \alpha u + \beta v}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_s .$$

The essentials of this method are used in the derivations contained in this paper.

II. — THE DISTRIBUTION OF THE MEANS AND OTHER LINEAR FUNCTIONS OF THE UNMATCHED VARIATE.

1. *Distribution, standard error and expected value of the means.*

Let us consider an infinite population with two normally distributed variates x, y. The equation of their distribution can be written in the form,

$$z = \lambda e^{-\tau} \tag{1}$$

where

$$\lambda = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y \sqrt{1 - r^2}}$$

and

$$\tau = \frac{1}{2(1 - r^2)} \left[\frac{(x - x_0)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y - y_0)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2r(x - x_0)(y - y_0)}{\sigma_x \sigma_y} \right]$$

x_0 and y_0 being the means, σ_x and σ_y the standard deviations and r the correlation coefficient of x and y in the general population.

The probability that a pair of values of the variates x, y drawn

(*) W. STEKLOFF. *Quelques applications nouvelles de la théorie de Fermeture au problème de représentation approchée des fonctions et au problème des moments*, «Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Petersbourg», Vol. XXXII, No. 4, 1914.

at random from this population will fall in the infinitesimal rectangle $(x, x + dx ; y, y + dy)$ is given, to within infinitesimals of higher order, by,

$$z\,dx\,dy\ . \tag{2}$$

The probability that any two values of x, y drawn at random, will be such that x will fall in the range $(x, x + dx)$, can be expressed as

$$P\,(x, x + dx) = dx \int_{-\infty}^{\infty} z\,dy\ . \tag{3}$$

If it is certain that x will fall in the interval $(x, x + dx)$, we may write as the probability that a y will fall in the interval $(y, y + dy)$,

$$F\,(y)\,dy = \frac{z\,dx\,dy}{P\,(x, x + dx)}\ ,$$

which gives as the distribution of y's that could possibly be paired with a value of x in $(x, x + dx)$,

$$F\,(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y\sqrt{1 - r^2}}\ e^{-\frac{1}{2\sigma_y^2(1-r^2)}\left[(y - y_0) - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - x_0)\right]^2}\ . \tag{4}$$

Now, let us consider a sample of s items drawn from this population in such a way that the distribution of the x' s is made identical, item by item, with a given distribution $D\,(x)$, independently of the y' s. The probability that the y's will fall in the s — dimensional cell $(y_i, y_i + dy_i)$, $i = 1, 2, \ldots s$, is, except for infinitesimals of higher order,

$$\prod_{i=1}^{s} F\,(y_i)\,d\,y_i\ . \tag{5}$$

If the mean of the y' s in the sample is denoted by $\bar{y}$, then $\bar{y} = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} y_i$ and the h-th moment $M_h\,(\bar{y})$ of $\bar{y}$ is clearly,

$$M_h\,(\bar{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{y})^h \prod_{i=1}^{s} F\,(y_i)\,d\,y_i \tag{6}$$

where the integral is s-fold.

Let $\varphi(\alpha)$ be the generating function of the moments $M_h(\bar{y})$, defined as

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha \bar{y}} \prod_{i=1}^{s} F(y_i)\, d y_i . \tag{7}$$

From this it is evident that $M_h(\bar{y}) = \left[\frac{d^h \varphi(\alpha)}{d \alpha^h}\right]_{\alpha = 0}$.

Substituting the value of $F(y)\,dy$ from (4) in (7) and remarking that

$$\bar{y} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} (y_i - y_0) + y_0$$

we get

$$\varphi(\alpha) = \lambda^s \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta(u,v) + \frac{\alpha}{s} \sum_{i=1}^{s} v_i + \alpha y_0}\, d V \tag{8}$$

where

$$\theta(u, v) = \frac{1}{2 \sigma_y^2 (1 - r^2)} \sum_{i=1}^{s} \left[v_i - r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} u_i \right]^2$$

$$v_i = y_i - y_0 , \; u_i = x_i - x_0 , \; d V = dv_1\, dv_2 \ldots dv_s .$$

This notation will be understood throughout the paper.

The variables in the exponent of the integrand of (8) separate and the integrations may be performed at once. Thus,

$$\varphi(\alpha) = e^{\alpha (p + y_0) + \frac{\alpha^2}{2 s} \mu_y} \tag{9}$$

where $p = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (\bar{x} - x_0)$, $\bar{x} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} x_i$, $\mu_y = \sigma_y^2 (1 - r^2)$

and for the sake of symmetry let $\mu_x = \sigma_x^2 (1 - r^2)$, which will appear later. We note that $\varphi(\alpha)$ and all of its derivatives are continuous for all finite values of α.

Now, let $f(z)$ be the distribution of the mean of the y's, where $z = \bar{y}$. Clearly,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, z^h\, d z = \left[\frac{d^h}{d \alpha^h} \int_{-\infty}^{\infty} (z)\, e^{\alpha z}\, d z\right]_{\alpha = 0} = \left[\frac{d^h \varphi(\alpha)}{d \alpha^h}\right]_{\alpha = 0} \tag{10}$$

and $f(z)$ must also satisfy the condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, d z = 1. \tag{11}$$

Hence, $f(z)$ must satisfy the integral equation

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, e^{\alpha z}\, d z = \varphi(\alpha). \tag{12}$$

It should be observed that $f(z)$ is independent of α and in addition to being a function of z, it is a function of y_o, p and μ_y.

Therefore, by differentiating both sides of (12) with respect to y_o, we get (using abbreviated notation),

$$\int \frac{\partial f}{\partial y_0}\, e^{\alpha z}\, d z = \alpha\, \varphi(\alpha). \tag{13}$$

Differentiating with respect to α,

$$\int z f\, e^{\alpha z}\, d z = \left(p + y_0 + \frac{\alpha\, \mu_y}{s}\right) \varphi(\alpha). \tag{14}$$

Combining (12, 13, 14) we get

$$\int \left[(p + y_0)\, f + \frac{\mu_y}{s} \frac{\partial f}{\partial y_0} - z f\right] e^{\alpha z}\, d z = 0, \tag{15}$$

which must be satisfied for all values of α. Whence,

$$(p + y_0)\, f + \frac{\mu_y}{s} \frac{\partial f}{\partial y_0} - z f = 0.$$

or

$$\frac{\partial f}{f} = \frac{s}{\mu_y} (z - y_0 - p)\, \partial y_0.$$

The solution of this differential equation is,

$$f(z) = \psi(z)\, e^{-\frac{s}{2\mu_y}(z - y_0 - p)^2}. \tag{16}$$

To determine $\psi(z)$, we substitute this value of $f(z)$ in (12) and after some reduction, obtain,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(z)\, e^{-\frac{s}{2\mu_y}\left[z - y_0 - p - \frac{\alpha\, \mu_y}{s}\right]^2} d z = 1 \tag{17}$$

which is satisfied for all values of α for $\psi(z) = \sqrt{\frac{s}{2\pi\mu_y}}$.

Finally,

$$f(z) = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y \sqrt{1 - r^2}}\, e^{-\frac{s}{2\sigma_y^2 (1 - r^2)}\left[z - y_0 - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(\bar{x} - x_0)\right]^2}. \tag{18}$$

If $g(z)$ is any other solution, it is evident that

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\, z^k\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, z^k\, dz \quad (k = 0, 1, 2 \ldots)$$

and by applying STEKLOFF's theory of closure, it can be shown that $g(z) \equiv f(z)$.

The expected value of $\bar{y}$ is

$$E(\bar{y}) = y_0 + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(\bar{x} - x_0),$$

and the standard error is

$$\sigma_{\bar{y}} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{s}}\sqrt{1 - r^2}.$$

2. *Moments, standard error and expected value of any linear function of the* y's.

Let

$$\bar{F}_y = \sum_{i=1}^{s} p_i y_i = \sum_{i=1}^{s} p_i (y_i - y_0) + y_0 \sum_{i=1}^{s} p_i$$

and

$$\bar{F}_x = \sum_{i=1}^{s} p_i x_i = \sum_{i=1}^{s} p_i (x_i - x_0) + x_0 \sum_{i=1}^{s} p_i$$

where $p_1, p_2, \ldots p_s$ is any set of constants.

We may write at once the generating function $\varphi(\alpha)$ of the moments $M_k(\bar{F}_y)$ as

$$\varphi(\alpha) = \lambda^s \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}\, dv. \tag{19}$$

where

$$-\tau = -\frac{1}{2\mu_y}\sum_{i=1}^{s}\left[v_i - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}u_i\right]^2 + \alpha\sum_{i=1}^{s} p_i v_i + \alpha y_0 \sum_{i=1}^{s} p_i.$$

Performing the integration in (19), we obtain

$$\varphi(\alpha) = e^{\alpha\left(y_0 P_1 + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\bar{F}_{x-x_0}\right) + \alpha^2\frac{\mu_y}{2}P_2} \tag{20}$$

where

$$P_1 = \sum_{i=1}^{s} p_i \quad , \quad P_2 = \sum_{i=1}^{s} p_i^2 \quad , \quad F_{x-x_0} = F_x - P_1 x_0.$$

Let $\bar{F}_y = z$ and $\Phi(z)$ the distribution function of z. Then $\Phi(z)$ must satisfy the integral equation,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z)\, e^{\alpha z}\, dz = \varphi(\alpha). \tag{21}$$

It is observed that $\varphi(\alpha)$ from (20) is identical in form with $\varphi(\alpha)$ as given by (9) and hence the solution of (21) can be written immediately from (18) as,

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y \sqrt{1-r^2}\,\sqrt{P_2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_y^2 (1-r^2) P_2}\,\theta^1(z)} \tag{22}$$

where

$$\theta^1(z) = \left[z - y_0 P_1 - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(\bar{F}_x - P_1 x_0)\right]^2.$$

From this distribution it is clear that the expected value of $\bar{F}_y$ is

$$E(F_y) = y_0 P_1 + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(\bar{F}_x - P_1 x_0)$$

and the standard error is

$$\sigma_{\bar{F}_y} = \sigma_y \sqrt{1-r_2}\,\sqrt{P_2}.$$

3. *Certain specializations of section 2.*

Let us consider the distributions of certain important statistics that arise from (22) by assigning special values to the p's.

The case for $p_1 = p_2 = \ldots = p_s = \frac{1}{s}$ leads to the distribution of the mean and was given by (18).

If s be divided into two groups s_1 and s_2, such that $p_1 = p_2 \ldots = p_{s_1} = \frac{1}{s_1}$ and $p_{s_1+1} = p_{s_1+2} = \ldots = p_s = \frac{-1}{s_2}$, we get the distribution of the difference of the means of the two samples of s_1 and s_2 items. In this case $P_1 = 0$, $P_2 = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}$ and

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y \sqrt{1-r^2}\,\sqrt{\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_y^2(1-r^2)\left(\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}\right)}\left[z - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\right]^2} \tag{23}$$

where $\bar{x}_1$ and $\bar{x}_2$ are the means of the first and second samples respectively, and of course, are constant from sample to sample.

If the p's of the second group are given the value $+\frac{1}{s_2}$, while those of the first group retain the value $\frac{1}{s_1}$ each, then $P_1 = 2$, $P_2 = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}$ and we get the ditribution of the sum ξ of the means of the two samples as,

$$(24)\quad \Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y\sqrt{1-r^2}\sqrt{\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_y^2(1-r^2)\left(\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}\right)}\left[\xi - 2y_0 - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(\bar{x}_1+\bar{x}_2-2x_0)\right]^2}$$

For the case in which all of the p's are unity, we get $P_1 = s$, $P_2 = s$ and (22) becomes the distribution of the sum of the s unmatched variates of the sample,

$$(25)\quad \Phi(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y\sqrt{1-r^2}\sqrt{s}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_y(1-r^2)s}\left[\eta - sy_0 - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(S_x - sx_0)\right]^2}$$

where S_x is the sum of the x's.

If we let the first s_1 of the p's be $+1$ and the last s_2 be -1, then $P_1 = s_1 - s_2$, $P_2 = s$ and we get as the distribution of the difference of the sums of the y's of the samples,

$$(26)\qquad \Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y\sqrt{1-r^2}\sqrt{s}}\, e^{-\lambda}$$

where

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma_y^2(1-r^2)s}\left[\xi - y_0(s_1 - s_2) - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(s_{x_1} - s_{x_2} - (s_1 - s_2)x_0\right]^2.$$

If we make the restriction that the sum of the p's be unity, (22) becomes the distribution of the weighted mean of the y's.

This series of special cases by no means exhausts the number of statistical distributions of interest to the statistician, that can be derived from (22) by specializing the p's. Clearly, we can extend the methods of the preceding section to the consideration of any linear function of the y's of a sample, part of which are drawn by matching with respect to the x's and a part of which are drawn purely at random.

Indeed, the generating function of the moments of such a function is,

$$\varphi(\alpha) = \lambda_1^{s_1} \lambda_2^{s_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}\, d\,V \tag{27}$$

where

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y}\,, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y \sqrt{1-r^2}}$$

s_1 is the number of y's drawn purely at random and s_2 is the number of y's drawn matching the x's with a given distribution independently of the y's, and where

$$-\tau = -\frac{1}{2\sigma_y^2} \sum_{i=1}^{s_1} v_i^2 - \frac{1}{2\sigma_y^2(1-r^2)} \sum_{i=s_1+1}^{s} \left(v_i - r\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\,u_i \right)^2$$
$$+ \alpha \sum_{i=1}^{s_1} p_i y_i + \alpha \sum_{i=s_1+1}^{s} p_i y_i\,.$$

If we consider the cases in which the first and second groups of the p's are $\frac{1}{s_1}$ and $-\frac{1}{s_2}$ respectively, we shall obtain the generating function of the moments of the difference of the means of the y's for two samples, one of which is drawn by matching the x's and the other is drawn purely at random. This special case will be sufficient to demonstrate the method of extending the foregoing principles to samples drawn from different populations. Performing the integration of (27) with these values of the p's we get,

$$\varphi(\alpha) = e^{-\alpha r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(\bar{x}_2 - x_0) + \alpha^2 \frac{\sigma_y^2}{2}\left(\frac{1}{s_1} + \frac{1-r^2}{s_2}\right)} \tag{28}$$

where $\bar{x}_2$ is the mean of the x's for the matched sample.

If we let z be the difference of the means for the two samples and $F(z)$ their distribution, then $F(z)$ is given as the solution of an integral equation of the form (12).

Thus,

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y \sqrt{\omega}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_y^2 \omega}\left[z + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(\bar{x}_2 - x_0)\right]^2} \tag{29}$$

where

$$\omega = \frac{1}{s_1} + \frac{1-r^2}{s_2}\,.$$

4. *Distribution of the mean of a variate when the distribution of* $n - 1$ *correlated variates are matched with* $n - 1$ *arbitrary distributions.*

Let us consider an infinite population with n normally distributed variates $x_1, x_2, \ldots x_n$. The distribution of these variates can be written in the form

$$z = K e^{-\frac{1}{2}\Phi} \tag{30}$$

where

$$K = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} R^{\frac{1}{2}} \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n}, \quad \Phi = \frac{1}{R} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{R_{ij} u_i u_j}{\sigma_i \sigma_j}, \quad \left(\begin{matrix} u_i = x_i - x_{io} \\ i = 1,2 \ldots n \end{matrix}\right).$$

and R_{ij} is the symmetric determinant $|r_{ij}|$, $(i, j = 1, 2, \ldots n)$ and R_{ij} is the co-factor of r_{ij} where r_{ij} is the correlation coefficient between the variates x_i, x_j, σ_j is the standard deviation and x_{io} the mean of x_i in the population.

It can be shown in a manner similar to that used in section 1 that the distribution of x_1 when $x_2, x_3 \ldots x_n$ are fixed, is,

$$f(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{R}{R_{11}}}\sigma_1} e^{-\frac{1}{2}\theta} \tag{31}$$

where

$$\theta = \frac{1}{\frac{R}{R_{11}}\sigma_1^2}\left[u_1 + \frac{\sigma_1}{R_{11}} \sum_{i=2}^{n} \frac{R_{1i}}{\sigma_i} u_i\right]^2, \quad (u_i = x_i - x_{io}).$$

In a sample of s items drawn from this population by matching the distributions of $x_2, x_3 \ldots x_n$ with $n - 1$ arbitrary distributions, let

$$\bar{x}_j = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} x_{ji} \quad (j = 1, 2, \ldots . n).$$

Clearly, $\bar{x}_1$ is the only one of the $\bar{x}$'s that can vary from sample to sample.

Thus, the generating function $\varphi(\alpha)$ for the moments M_h of $\bar{x}_1$ can be set up as,

$$\varphi(\alpha) = \lambda^s \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} d\, U_{(1)} \tag{32}$$

where

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{R}{R_{11}}}\sigma_1}, \quad dU_{(1)} = du_{11}\, du_{12} \ldots du_{1s}$$

$$-\tau = -\frac{1}{2\frac{R}{R_{11}}\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{s}\left[u_{1i} + \frac{\sigma_1}{R_{11}}\sum_{j=2}^{n}\frac{R_{1i}}{\sigma_i}u_{ji}\right]^2 + \alpha\left[\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}u_{1i} + x_{10}\right]$$

$$= -p\sum_{i=1}^{s}u_{1i}^2 + 2\sum_{i=1}^{s}t_i u_{1i} + \psi$$

where

$$p = \frac{1}{2\frac{R}{R_{11}}\sigma_1^2}, \quad t_i = \frac{\alpha}{2s} - \frac{1}{2\sigma_1 R}\sum_{j=2}^{n}\frac{R_{ji}}{\sigma_j}u_{ji}$$

$$\psi = \alpha x_{10} - \frac{1}{2RR_{11}}\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=2}^{n}\frac{R_{ij}}{\sigma_i}u_{ji}\right)^2.$$

Integrating expression (32) we get,

$$\varphi(\alpha) = e^{\alpha(x_{10}+q)+\frac{\alpha^2}{2s}\mu_1} \tag{33}$$

where

$$\mu_1 = \frac{R}{R_{11}}\sigma_1^2, \quad q = -\frac{\sigma_1}{R_{11}}\sum_{j=2}^{n}\frac{\bar{u}_j}{\sigma_j}$$

and

$$\bar{u}_j = \bar{x}_j - x_{j0}.$$

Now let $\bar{x}_1 = z$, and $f(z)$ the distribution of z. Then $f(z)$ is the solution of an integral equation of the form (12) and hence is

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{R}{R_{11}}}\sigma_1}\, e^{-\frac{s}{2\frac{R}{R_{11}}\sigma_1^2}\left[z - x_{10} + \frac{\sigma_1}{R_{11}}\sum_{j=2}^{n}\frac{R_{1j}}{\sigma_j}(\bar{x}_j - x_{j0})\right]^2}. \tag{34}$$

But $\frac{R}{R_{11}} = 1 - r^2_{1.2,3\ldots n}$ where $r_{1.2,3\ldots n}$ is the multiple correlation

coefficient of order $n-1$ of x_1 with respect to $x_2, x_3, \ldots x_n$. We note from (34) that

$$E(\bar{x}_1) = x_{10} - \frac{\sigma_1}{R_{11}} \sum_{j=2}^{n} \frac{R_{1j}}{\sigma_j} (\bar{x}_j - x_{j0})$$

and

$$\sigma_{\bar{x}_1} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{s}} \sqrt{1 - r^2_{1.2,3\ldots n}} .$$

III. — The moments and distribution of the standard deviation of the y's

1. *On the moments and distribution of the standard deviation of the unmatched variate.*

From a sample of s items drawn in the manner previously described, let

$$\bar{\mu}_y = \bar{\mu}_{02} = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{s} (y_j - \bar{y})^2 \quad , \quad \bar{y} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} y_i .$$

But we can write

$$\bar{\mu}_y = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} (y_i - y_0)^2 - \left[\frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} (y_i - y_0) \right]^2 = \frac{1}{s} \Sigma v^2 - \frac{1}{s^2} (\Sigma v)^2 .$$

Similarly, let

$$\bar{\mu}_x = \bar{\mu}_{20} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{s} \Sigma u^2 - \frac{1}{s^2} (\Sigma u)^2$$

which is constant from sample to sample.

If we let $M_h(\bar{\mu}_y)$ be the h-th moment of $\bar{\mu}_y$, it is clear that the generating function $\varphi(\alpha)$ of $M_h(\bar{\mu}_y)$ is,

$$\varphi(\alpha) = \lambda^s \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} \, d\, V \tag{35}$$

where

$$-\tau = -\frac{1}{2\mu_y} \sum_{i=1}^{s} \left(v_i - r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} u_i \right)^2 + \alpha \left[\frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} v_i^2 - \frac{1}{s^2} \left(\sum_{i=1}^{s} v_i \right)^2 \right] \tag{36}$$

and as before

$$\mu_y = \sigma_y^2 (1 - r^2) \, , \, \lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma_y \sqrt{1 - r^2}} \, , \, d\, V = d\, v_1 \, d\, v_2 \ldots d\, v_s .$$

We can write (36) as

$$(37) \qquad -\tau = -p\,\Sigma v^2 - 2q\,\Sigma v\,v^1 + 2a\,\Sigma v\,u + b\,\Sigma u^2$$

where

$$p = \frac{1}{2\mu_y} - \frac{\alpha}{s} + \frac{\alpha}{s^2}, \qquad b = -\frac{\gamma^2}{2\mu_x},$$

$$q = \frac{\alpha}{s^2}, \qquad a = \frac{\gamma}{2\sqrt{\mu_x\,\mu_y}}.$$

Then,

$$(38) \qquad \varphi(\alpha) = \lambda^s e^{b\Sigma u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p\Sigma v^2 - 2q\Sigma v\,v^1 + 2a\Sigma v\,u}\, dV.$$

But, ROMANOVSKY (*) has essentially evaluated this integral, which, when placed in (38) gives

$$(39) \quad \varphi(\alpha) = \lambda^s e^{b\Sigma u^2} \sqrt{\frac{\pi^s}{(p-q)^{s-1}(p+\overline{s-1}\,q)}}\; e^{a^2\left[\frac{1}{p_{s-1}} - \frac{1}{p-q}\right](\Sigma u)^2 + \left(\frac{a^2}{p-q}\right)\Sigma u^2}$$

where

$$p_{s-1} = \frac{(p-q)\,(p+\overline{s-1}\,q)}{(p+\overline{s-2}\,q)}.$$

By substituting the values of $\lambda, a, b, p, p_{s-1}, q$ and u in (39) we find after some algebraic reduction,

$$(40) \qquad \varphi(\alpha) = \left(1 - 2\frac{\alpha}{s}\mu_y\right)^{-\frac{s-1}{2}} e^{\frac{\alpha\gamma^2\mu_y\bar{\mu}_x}{\mu_x\left(1-2\frac{\alpha}{s}\mu_y\right)}}.$$

It is clear that $\varphi(\alpha)$ is real and finite for values of α in the neighborhood of $\alpha = 0$, and is continuous together with all of its derivatives at $\alpha = 0$.

By placing

$$A = \frac{s}{2\mu_y}, \qquad B = \frac{s\gamma^2\bar{\mu}_x}{\mu_x}, \qquad a = \frac{s-1}{2}$$

(*) ROMANOVSKY, loc. cit., pp. 13-17.

we can write (40) as

$$\varphi(\alpha) = A^a (A-\alpha)^{-a} e^{\frac{B\alpha}{A-\alpha}}$$

$$= A^a (A-\alpha)^{-a} e^{-B+\frac{BA}{A-\alpha}}. \tag{41}$$

Now, let $\bar{\mu}_y = z$ and $F(z)$ the distribution function of z, which has the range from 0 to ∞. It is evident that $F(z)$ must satisfy the integral equation

$$\int_0^\infty F(z)\, e^{\alpha z}\, dz = A^a (A-\alpha)^{-a} e^{-B+\frac{BA}{A-\alpha}} = \varphi(\alpha). \tag{42}$$

To solve this equation, let us expand $e^{\frac{BA}{A-\alpha}}$ into its series. Thus, we get

$$\int_0^\infty F(z)\, e^{\alpha z}\, dz = e^{-B} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i A^{a+i} (A-\alpha)^{-\alpha-i}}{i!}. \tag{43}$$

It has been shown by ROMANOVSKY that the solution of an integral equation of the form

$$\int_0^\infty f(z)\, e^{\alpha z}\, dz = A^m (A-\alpha)^{-m}$$

is

$$f(z) = \frac{A^m}{\Gamma(m)} z^{m-1} e^{-Az}.$$

Making use of this solution in (43) we find

$$F(z) = e^{-B}\left[\frac{A^a z^{a-1} e^{-Az}}{\Gamma(a)} + \frac{B A^{a+1} z^a e^{-Az}}{1!\,\Gamma(a+1)} + \frac{B^2 A^{a+1} z^{a+1} e^{-az}}{2!\,\Gamma(a+2)} + \dots\right]$$

$$= \frac{A^a z^{a-1} e^{-Az-B}}{\Gamma(a)}\left[1 + \frac{BAz}{1!\,a} + \frac{B^2 A^2 z^2}{2!\,a(a+1)} + \frac{B^3 A^3 z^3}{3!\,a(a+1)(a+2)} + \dots\right], \tag{44 (*)}$$

(*) This is a special case of the (B) distribution found by FISHER in a different manner. See, R. A. FISHER, *The general sampling distribution of the multiple correlation coefficient*, « Proceedings of the Royal Society of London », (A) Vol. 121 (1928), pp. 654-73.

which is uniformly convergent for all values of z. Again, we refer to Stekloff's work to establish the uniqueness of this solution.

To find the distribution of $\bar{\sigma}_y$, where $\bar{\sigma}_y = \sqrt{\bar{\mu}_y}$, we use "Student's" (*) method and let $x = \sqrt{z}$, whereupon, $dz = 2x\,dx$. Thus, we find.

$$(45)\quad \psi(x) = \frac{2A^a x^{2a-1} e^{-B-Ax^2}}{\Gamma(a)}\left[1 + \frac{BAx^2}{1!\,a} + \frac{B^2A^2x^4}{2!\,a(a+1)} + \ldots\right].$$

We are now in position to find the moments N_h $(h = 1, 2, \ldots)$ of the distribution of $\bar{\sigma}_y$. By definition,

$$N_h = \int_0^\infty x^h \psi(x)\,dx.$$

By changing the variable from x^2 to z and integrating term by term, which is valid since the series is uniformly convergent for all values of x,

$$(46)\quad N_h = \frac{A^{-\frac{h}{2}} e^{-B}\,\Gamma\left(a+\frac{h}{2}\right)}{\Gamma(a)}\left[1 + \frac{B\left(a+\frac{h}{2}\right)}{1!\,a} + \frac{B^2\left(a+\frac{h}{2}\right)\left(a+\frac{h}{2}+1\right)}{2!\,a(a+1)} + \frac{B^3\left(a+\frac{h}{2}\right)\left(a+\frac{h}{2}+1\right)\left(a+\frac{h}{2}+2\right)}{3!\,a(a+1)(a+2)} + \ldots\right].$$

It is interesting to note that if the correlation r between x and y is zero, then $B = 0$, and (45) reduces to,

$$\Psi(x)\Big]_{r=0} = \frac{2A^a x^{2a-1} e^{-Ax^2}}{\Gamma(a)}$$

which is the distribution of the standard deviation of a variate from a sample of s items drawn at random from a normally distributed population, and which is a result that should be expected since the x's are matched independently of the y's from a population in which the correlation between x and y is zero.

(*) See "Student", *The probable error of a mean*, «Biometrika», Vol. VI. 1908, p. 5.

2. *Moments and distribution of the standard deviation of a variate when the distribution of* $n - 1$ *correlated variates are matched with* $n - 1$ *arbitrary distributions.*

The procedure to be followed here is similar to that in section 4 of part II. Thus, let us consider a sample of s items in which the distributions of $x_2, x_3 \ldots x_n$ are matched with $n - 1$ arbitrary distributions, independently of x_1. From this sample let

$$\bar{\mu}_j = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} (x_{ji} - \bar{x}_j)^2 = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} u_{ji}^2 - \frac{1}{s^2} \left(\sum_{i=1}^{s} u_{ji} \right)^2.$$

Then, $\bar{\mu}_1$ is the only one of the $\bar{\mu}_j$ that can vary from sample to sample. Hence, our generating function of the moments of $\bar{\mu}_1$ is,

$$\varphi(\alpha) = \lambda^s \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} d U_{(1)} \tag{47}$$

where

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{R}{R_{11}}} \sigma_1}$$

and

$$-\tau = -\frac{1}{2 \frac{R}{R_{11}} \sigma_1^2} \sum_{i=1}^{s} u_{1i}^2 - \frac{2}{2 \frac{R}{R_{11}} \sigma_1^2} \frac{\sigma_1}{R_{11}^2} \sum_{i=1}^{s} \left[\sum_{j=2}^{n} \frac{R_{1j}}{\sigma_j} u_{ji} \right] u_{1i}$$

$$- \frac{1}{2 \frac{R}{R_{11}} \sigma_1^2} \frac{\sigma_1^2}{R_{11}^2} \sum_{j=1}^{s} \left[\sum_{i=2}^{n} \frac{R_{1j}}{\sigma_j} u_{ij} \right]^2 + \frac{\alpha}{s} \sum_{i=1}^{s} u_{1i}^2 - \frac{\alpha}{s^2} \left(\sum_{i=1}^{s} u_{1i} \right)^2.$$

Or, let us write briefly,

$$-\tau = -p \Sigma u_1^2 - 2 q \Sigma u_1 u_1^1 + 2 a \Sigma t u_1 + \Psi$$

where

$$p = \frac{1}{2 \frac{R}{R_{11}} \sigma_1^2} - \frac{\alpha}{s} + \frac{\alpha}{s^2} \qquad q = \frac{\alpha}{s^2}$$

$$a = -\frac{1}{2 \frac{R}{R_{11}} \sigma_1^2} \qquad t_i = \frac{\sigma_1}{R_{11}} \sum_{j=2}^{n} \frac{R_{1j}}{\sigma_j} u_{ji}$$

$$\Psi = -\frac{1}{2 \frac{R}{R_{11}} \sigma_1^2} \sum_{i=1}^{s} t_i^2 .$$

Therefore, (47) takes a form similar to (38) and its value is, after substituting the values of a, p, q, λ, Ψ

$$(48) \qquad \varphi(\alpha) = B^a (B - \alpha)^{-a} e \frac{B \alpha K}{B - \alpha}$$

where $$B = \frac{s}{2 \frac{R}{R_{II}} \sigma_1^2} \qquad a = \frac{s - 1}{2}$$

$$K = \frac{1}{s} \Sigma t^2 - \frac{1}{s^2} (\Sigma t)^2 = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} \left[\sum_{j=2}^{n} \frac{\sigma_1 R_{1j}}{\sigma_j R_{II}} (x_{ji} - \bar{x}_j) \right]^2$$

$$= \sum_{j=2}^{n} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_j^2} \frac{R_{1j}^2}{R_{II}^2} \bar{\sigma}_j^2 + 2 \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} \frac{\sigma_1^2 R_{1j} R_{1k}}{\sigma_j \sigma_k R_{II}^2} \bar{\sigma}_j \bar{\sigma}_k \bar{r}_{jk}$$

and $$\bar{\sigma}_j^2 = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} (x_{ji} - \bar{x}_j)^2 \qquad (j = 2, 3, \ldots n)$$

$$\bar{r}_{jk} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} \frac{(x_{ji} - \bar{x}_j)(x_{ki} - \bar{x}_k)}{\bar{\sigma}_j \bar{\sigma}_k}$$

$$(j \neq k \ , \ j, k = 2, 3, \ldots n) .$$

It is to be observed that $\bar{\sigma}_j$ and $\bar{r}_{jk}$ $(j, k = 2, 3 \ldots n, \ j \neq k)$ are calculated from the $n - 1$ arbitrary distributions and are therefore constant from sample to sample.

The distribution of $\bar{\mu}_1$ where $\bar{\mu}_1 = z$ is the solution of the integral equation,

$$(49) \qquad \int_0^{\infty} F(z) e^{\alpha z} dz = B^a (B - \alpha)^{-a} e^{-BK} e \frac{B^2 K}{B - \alpha}$$

which is identical in form, with (42) and thus, we can write the solution at once as,

$$F(z) = \frac{B^a z^{a-1} e^{-BK - Bz}}{\Gamma(a)} \left[1 + \frac{B^2 K z}{1 ! a} + \frac{B^4 K^2 z^2}{2 ! a (a+1)} + \frac{B^6 K^3 z^3}{3 ! a (a+1)(a+2)} + \ldots \right].$$

The distribution of the standard deviation $\sqrt{\bar{\mu}_1}$ is found by setting $z = x^2$, thereby obtaining,

$$f(x) = \frac{2\,B^a\,x^{2a-1}\,e^{-BK-Bx^2}}{\Gamma(a)}\left[1 + \frac{B^2\,K\,x^2}{1!\,a} + \frac{B^4\,K^2\,x^4}{2!\,a\,(a+1)} + \ldots\right]. \tag{50}$$

The h-th moment of the standard deviation $\bar{\sigma}_{x_1}$, is clearly,

$$M_h(\bar{\sigma}_{x_1}) = \frac{B^{-\frac{h}{2}}\,e^{-BK}\,\Gamma\left(a+\frac{h}{2}\right)}{\Gamma(a)}\left[1 + \frac{BK\left(a+\frac{h}{2}\right)}{1!\,a} + \frac{B^2\,K^2\left(a+\frac{h}{2}\right)\left(a+\frac{h}{2}+1\right)}{2!\,a\,(a+1)} + \ldots\right]. \tag{51}$$

3. *The expected value and the standard error of the standard deviation of the* y's.

We have found the h-th moment N_h of the standard deviation of the y's to be of the form (46). It is clear that the series in this expression converges for all values of B, but the convergence is so slow and the s is so inextricably involved in the series that this form of N_h is almost worthless for practical statistical work. In order to render it into a useful form we shall make use of Kummer's (*) relation that

$$e^{-x}\left[1 + \frac{\alpha\,.\,x}{1!\,\beta\,.} + \frac{\alpha(\alpha+1)\,x^2}{2!\,\beta(\beta+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!\,\beta(\beta+1)(\beta+2)}x^3 + \ldots\right] = \left[1 - \frac{(\beta-\alpha)}{1!\,\beta}x + \frac{(\beta-\alpha)(\beta-\alpha+1)}{2!\,\beta(\beta+1)}x^2 - \frac{(\beta-\alpha)(\beta-\alpha+1)(\beta-\alpha+2)}{3!\,\beta(\beta+1)(\beta+2)}x^3 + \ldots\right]. \tag{52}$$

(*) See KUMMER: *Über die hypergeometrische Reihe*, « Crelle's Journal für Mathematik », Vol. XV. 1836, pp. 138-140. Also see WHITTAKER and WATSON: *Modern Analysis*, 2nd edition, pp. 331-334.

Applying this transformation to N_h we get,

$$N_h = \frac{A^{-\frac{h}{2}}\Gamma\left(a+\frac{h}{2}\right)}{\Gamma(a)}\left[1+\frac{\frac{h}{2}\left(a+\frac{1}{2}\right)}{1!\,a}\lambda+\frac{\frac{h}{2}\left(\frac{h}{2}-1\right)}{2!\,a(a+1)}\left(a+\frac{1}{2}\right)^2\lambda^2+\right.$$

(53)

$$\left.+\frac{\frac{h}{2}\left(\frac{h}{2}-1\right)\left(\frac{h}{2}-2\right)}{3!\,a(a+1)(a+2)}\left(a+\frac{1}{2}\right)^3\lambda^3+\ldots\right]$$

which converges uniformly for all values of λ for finite s, where

$$\left(a+\frac{1}{2}\right)\lambda=\frac{s}{2}\lambda=B, \qquad \lambda=\frac{r^2\bar{\mu}_x}{\mu_x}.$$

If we write $x=\frac{1}{a}$ in the series, we can write N_h as,

$$N_h = \frac{A^{-\frac{h}{2}}\Gamma\left(a+\frac{h}{2}\right)}{\Gamma(a)}\left\{\left[1+\frac{\frac{h}{2}}{1!}\lambda+\frac{\frac{h}{2}\left(\frac{h}{2}-1\right)}{2!\,(1+x)}\lambda^2+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{h}{2}\left(\frac{h}{2}-1\right)\left(\frac{h}{2}-2\right)}{3!\,(1+x)(1+2x)}\lambda^3+\ldots\right]+\frac{h}{4}\lambda x\left[1+\frac{\left(\frac{h}{2}-1\right)}{1!\,(1+x)}\lambda+\right.$$

(54)

$$\left.+\frac{\left(\frac{h}{2}-1\right)\left(\frac{h}{2}-2\right)}{2!\,(1+x)(1+2x)}\lambda^2+\ldots\right]+\frac{\frac{h}{2}\left(\frac{h}{2}-1\right)}{2!\,(1+x)}x^2\frac{\lambda^2}{4}\left[1+\frac{\left(\frac{h}{2}-2\right)}{1!\,(1+x)}\lambda+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\left(\frac{h}{2}-2\right)\left(\frac{h}{2}-3\right)}{2!\,(1+x)(1+2x)}\lambda^2+\ldots\right]+\psi\right\}$$

where ψ is composed of terms of order x^3 and higher.

Let us denote the series in the brace by $f(x)$ and expand it about the point $x=0$ (or $s=\infty$) by Taylor's expansion. We remark that for $s=\infty$, the series converges only when $\lambda<1$. We write,

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots \tag{55}$$

It is clear from (54) that

$$f(0)=(1+\lambda)^{\frac{h}{2}} \qquad \lambda<1. \tag{56}$$

Bys traightforward differentiation of $f(x)$, it is easy to verify that

$$f'(0) = \frac{h}{2}\lambda\left[\frac{1}{2} + \lambda\left(1 - \frac{h}{4}\right)\right](1+\lambda)^{\frac{h}{2}-2} \qquad \lambda < 1. \tag{57}$$

Again, it is not difficult, though somewhat tedious to show that

$$f''(0) = \frac{\frac{h}{2}\left(\frac{h}{2}-1\right)}{4}\lambda^2 \frac{d^2}{dt^2}\left[t^2(1+\lambda t)^{\frac{h}{2}-2}\right]_{t=1}$$
$$+ \frac{\frac{h}{2}\left(\frac{h}{2}-1\right)}{6}\lambda^2 \frac{d}{dt}\left[(t^3 - 3t^2)(1+\lambda t)^{\frac{h}{2}-2}\right]_{t=1}$$
$$+ \frac{\frac{h}{2}\left(\frac{h}{2}-1\right)}{4}\lambda^2(1+\lambda)^{\frac{h}{2}-2} \qquad \lambda < 1.$$

After considerable reduction, we get

$$f''(0) = \frac{\frac{h}{2}\left(\frac{h}{2}-1\right)}{2}\lambda^2\left[\lambda^2\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{h}{2}-2\right)\left(\frac{h}{4}-\frac{1}{6}\right)\right) + \right.$$
$$\left. + \lambda\left(\frac{2}{3}h - \frac{5}{3}\right) + \frac{1}{2}\right](1+\lambda)^{\frac{h}{2}-4}. \tag{58}$$

Thus, from (54, 55, 56, 58) we finally obtain,

$$N_h = \frac{A^{-\frac{h}{2}}\Gamma\left(a+\frac{h}{2}\right)}{\Gamma(a)}\left\{(1+\lambda)^{\frac{h}{2}} + \frac{\frac{h}{2}\lambda\left(\frac{1}{2} + \lambda\left(1-\frac{h}{4}\right)\right)}{1!\,a}(1+\lambda)^{\frac{h}{2}-2}\right.$$
$$+ \frac{\frac{h}{2}\left(\frac{h}{2}-1\right)}{2!\,2a^2}\lambda^2\left[\lambda^2\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{h}{2}-2\right)\left(\frac{h}{4}-\frac{1}{6}\right)\right) + \right. \tag{59}$$
$$\left.\left. + \lambda\left(\frac{2}{3}h - \frac{5}{3}\right) + \frac{1}{2}\right](1+\lambda)^{\frac{h}{2}-4} + \Phi\right\}$$

where Φ consists of terms of order a^{-3} and higher, with factorials in the denominators of the terms.

We are now able to find the standard error of $\bar{\sigma}_y$. Thus,

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_y} = N_2 - N_1^2. \tag{60}$$

Now, from (53),

$$N_2 = \frac{1}{A}\left(a + \frac{s}{2}\lambda\right). \tag{61}$$

We remark that N_2 can also be found by differentiating $\varphi(\alpha)$, as given by (41) once with respect to α and setting $\alpha = 0$ afterwards, for the second moment of the standard deviation $\bar{\sigma}_y$ for the distribution function of $\bar{\sigma}_y$, is clearly the same as the first moment of the square of the standard deviation $\bar{\sigma}_y^2 = \bar{\mu}_y$ for the distribution function of $\bar{\mu}_y$.

From (59), we find that approximately, (for large values of s),

$$N_1 = \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a)} \left[(1+\lambda)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\lambda\right)(1+\lambda)^{-\frac{3}{2}} - \frac{\lambda^2}{16a}\left(\frac{3}{8}\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2}\right)(1+\lambda)^{-\frac{7}{2}}\right]$$

or

$$N_1^2 = \frac{1}{A} \frac{\Gamma^2\left(a + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2(a)} (1+\lambda)\left[1 + \frac{\lambda(3\lambda+2)}{4a(1+\lambda)^2} + \frac{1}{a^2}\frac{\lambda^3(3\lambda+10)}{32(1+\lambda)^4}\right]. \tag{62}$$

By using the formula

$$\log \Gamma(1+x) = \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{1}{12x} - \dots$$

it is not difficult to show that,

$$\frac{\Gamma^2\left(a + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2(a)} = \left(a + \frac{1}{2}\right)\left[1 - \frac{3}{2(2a+1)} + \frac{1}{8(2a+1)^2} + \dots\right].$$

Replacing a by its value $\frac{s-1}{2}$ we get,

$$N_1^2 \cong \frac{1}{A}\left[\frac{s}{2} + \frac{s\lambda}{2} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\lambda + \frac{\lambda(3\lambda+2)}{4(1+\lambda)} + \frac{1}{s}\left(-\frac{\lambda(3\lambda+2)}{8(1+\lambda)} + \frac{\lambda^3(3\lambda+10)}{16(1+\lambda)^3}\right)\right]. \tag{63}$$

Finally, by substituting the values of N_2 and N_1^2 given by (61, 63) in (60) we find after simplification,

$$(64)\quad \sigma_{\bar{\sigma}_y} \cong \frac{\sigma_y\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{2s}}\sqrt{\frac{1+2\lambda}{1+\lambda}+\frac{\lambda}{4s}\left(6-\frac{2}{1+\lambda}-\frac{3\lambda^2}{(1+\lambda)^2}-\frac{7\lambda^2}{(1+\lambda)^3}\right)}$$

where

$$\lambda = \frac{r^2\,\bar{\mu}_x}{\sigma_x^2\,(1-r^2)}.$$

As a first approximation, we have,

$$(65)\qquad \sigma_{\bar{\sigma}_y} = \frac{\sigma_y\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{2s}}\sqrt{\frac{1+r^2\left(2\frac{\bar{\mu}_x}{\sigma_x^2}-1\right)}{1+r^2\left(\frac{\bar{\mu}_x}{\sigma_x^2}-1\right)}}$$

If the initial distribution, that is, the fixed distribution $D(x)$ of the x's, belongs to a sample drawn purely at random from a normally distributed population, then by the well known proposition in expected values that

$$E(\bar{\mu}_x) = \frac{s-1}{s}\sigma_x^2 = \sigma_x^2 - \frac{\sigma_x^2}{s}$$

we get as the first approximation,

$$(66)\qquad \sigma_{\bar{\sigma}_y} = \frac{\sigma_y\sqrt{1-r^4}}{\sqrt{2s}}.$$

Referring to (62) we find at once, as the expected value of $\bar{\sigma}_y$,

$$N_1 = E(\bar{\sigma}_y) = \frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{\frac{s}{2}}\left(1-\frac{3}{2s}+\ldots\right)\left(1+\frac{\lambda(3\lambda+2)}{4s(1+\lambda)^2}+\ldots\right)\sqrt{1+\lambda}$$

$$(67)\qquad = \sigma_y\sqrt{1-r^2}\sqrt{1+\lambda}\left[1-\frac{1}{4s}\cdot\frac{(3+4\lambda)}{(1+\lambda)^2}+\ldots\right].$$

If the distribution of the x's is random, (67) becomes

$$E(\bar{\sigma}_y) = \sigma_y\left(1-\frac{(3-r^4)}{4s}+\ldots\right).$$

It is clear that the analysis of this section may be readily applied to (51) to obtain approximations of the standard error of $\bar{\sigma}_{x_1}$ and expected value of $\bar{\sigma}_{x_1}$, for, in form, it is identical with (46).

4. *Distribution of "Student's" z for the unmatched variate.*

In this section, we shall consider the distribution of the ratio,

$$\frac{\bar{y} - y_0}{\sqrt{\bar{\mu}_y}}$$

where as before,

$$\bar{y} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} y_i \quad , \quad \bar{\mu}_y = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} (y_i - \bar{y})^2$$

and y_0 is the mean of the y's in the population. If the y's are drawn purely at random, "Student" (*) has denoted this ratio by z. This has been considered an especially important statistic by R. A. FISHER and others. We shall, however, extend the notation and denote this ratio for the unmatched variate for the type of sampling we are considering, by z.

For samples drawn in the previously described manner, it can be shown without much difficulty that $\bar{y} - y_0$ and $\sqrt{\bar{\mu}_y}$ are independently distributed (**), and hence, the simultaneous distribution function $f(u, v)$ of u, v where $u = \bar{y} - y_0$ and $v = \bar{\mu}_y$ is the product of two independent functions $f_1(u)$ and $f_2(v)$.

(*) "Student", loc. cit., p. 7.

(**) See R. A. FISHER: *Distribution of the correlation coefficient of small samples*, « Biometrika », Vol. X, 1915, p. 510.

Indeed, it can be shown that the generating function $\varphi(\alpha, \beta)$ of the moments of the simultaneous distribution $f(u, v)$ of u, v where $u = \bar{y} - y_0$ and $v = \bar{\mu}_y$ is of the form $\varphi_1(\alpha) \cdot \varphi_2(\beta)$ where $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 1$. Hence, $f(u, v)$ is a solution of the integral equation

$$\int_{\infty}^{0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha u + \beta v} f(u, v) f \, d u \, d v = \varphi_1(\alpha) \cdot \varphi_2(\beta)$$

and therefore,

$$\varphi_1(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha u} f_1(u) \, d u \quad , \quad \varphi_2(\beta) = \int_{0}^{\infty} e^{\beta v} f_2(v) \, d v$$

which shows that $f(u, v) = f_1(u) . f_2(v)$. It is clear that a change in variables from v to $\sqrt{v}$ does not destroy the independence of u and v.

Now, from (18), we find that the distribution of u is given by

$$(68) \qquad f_1(u) = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{s}{2\sigma_y^2(1-r^2)}\left[u - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(\bar{x}-x_0)\right]^2}.$$

We also observe that the distribution of $\bar{\mu}_y$ has been given by (44) and hence, we can write,

$$(69) \qquad f(u,v) = f_1(u)\cdot f_2(v) = \frac{A^{a+\frac{1}{2}}\, v^{a-1}\, e^{-A[u-K(\bar{x}-x_0)]^2 - B - Av}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(a)}\left[1 + \right.$$

$$\left. + \frac{BAv}{1!\,a} + \frac{B^2A^2v^2}{2!\,a(a+1)} + \cdots\right]$$

where

$$A = \frac{s}{2\mu_y}\ ,\quad B = \frac{s\,r^2\,\bar{\mu}_x}{2\mu_x}\ ,\quad a = \frac{s-1}{2}$$

$$K = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\ ,\quad \mu_y = \sigma_y^2(1-r^2)\ ,\quad \mu_x = \sigma_x^2(1-r^2)\ .$$

If we set $x = \sqrt{v}$ in (69), we derive as the distribution of $(\bar{y} - y_0)$ and $\sqrt{\bar{\mu}_y}$,

$$(70) \qquad F(u,x) = \frac{2A^{a+\frac{1}{2}}\, x^{2a-1}}{\sqrt{\mu}\,\Gamma(a)}\, e^{-A[u-K(\bar{x}-x_0)]^2 - B - Ax^2}\left[1 + \right.$$

$$\left. + \frac{BAx^2}{1!\,a} + \frac{B^2A^2x^4}{2!\,a(a+1)} + \cdots\right].$$

It is evident that the product moment M_{hl}, where $M_{hl} = E(u^h x^l)$ is given by $M_{hl} = m_h n_l$, where m_h is the h-th moment of $f_1(u)$ and n_l is the l-th moment of the standard deviation $\bar{\sigma}_y$ and is given by (46) or in a more valuable form by (53). Since z is defined as the ratio $\frac{u}{\sqrt{v}} = \frac{u}{x}$, we have as the h-th moment of z,

$$M_h(z) = M_{h,-h} = m_h n_h$$

which exists as may be shown from (53) if $a - \frac{h}{2} > 0$ or $s - 1 - h > 0$ $\left(\text{since } a = \frac{s-1}{2}\right)$.

We are now able to find the standard error of z. We have

$$\sigma_z^2 = M_2 - M_1^2 .$$

But

$$M_1 = K\,(\bar{x} - x_0)\,A^{\frac{1}{2}}\,\frac{\Gamma\left(a - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\,(a)}\left[(1+\lambda)^{-\frac{1}{2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\lambda\,\frac{\left(1 + \frac{5}{2}\lambda\right)(1+\lambda)^{-\frac{5}{2}}}{a} + \Psi\right]$$

and

$$M_2 = \left[\frac{\sigma_y^2\,(1-r^2)}{s} + K^2\,(\bar{x} - x_0)^2\right] \cdot A\,\frac{\Gamma\,(a-1)}{a}\left[(1+\lambda)^{-1} - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda}{2}\,\frac{(1+3\lambda)\,(1+\lambda)^{-3}}{1!\,a} + \Psi'\right]$$

where Ψ and Ψ' are composed of terms of order $\frac{1}{a^3}$ and higher.

Replacing K, A and a by their values, we get after some algebraic simplification, as the first approximation,

$$(71)\quad \sigma_z = \sqrt{\frac{1}{s\,(1+\lambda)}\left[1 + \frac{r^2}{2\,\sigma_x^2\,(1-r^2)}\left(3 - \frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2}\right)(\bar{x} - x_0)^2\right]} .$$

If the distribution of the x's is random, we can take

$$\lambda = \frac{s-1}{s}\,\frac{r^2\,\sigma_x^2}{\sigma_x^2\,(1-r^2)} = \frac{s-1}{s}\,\frac{r^2}{1-r^2}$$

and we get as the first approximation in this case,

$$(72)\quad \sigma_z = \sqrt{\frac{1-r^2}{s}\left[1 + \frac{r^2}{2\,\sigma_x^2\,(1-r^2)}\,(3 - r^4)\,(\bar{x} - x_0)^2\right]}$$

which is independent of the variance of the y's in the population, but not of the variance of the x's.

To find the distribution $\Phi\,(z)$ of z, we set $u = z\sqrt{v}$ in (69) and integrate with respect to v. Thus $du = \sqrt{v}\,dz$ and we have

$$\Phi\,(z)\,dz = dz \int_0^\infty f\,(z\sqrt{v}, v)\,\sqrt{v}\,dv$$

wherefrom, by performing the integration,

$$\Phi(z) = \frac{2A^{a+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} e^{-B-AK^2\frac{(\bar{x}-x_0)^2}{1+z^2}}$$

(73)

$$\cdot \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(BA)^i}{i!\,\Gamma(a+i)} \int_0^{\infty} t^{2(a+i)} e^{-A(z^2+1)\left[t-\frac{K(\bar{x}-x_0)}{z^2+1}z\right]^2} dt \right].$$

In case the correlation r between x and y is zero, then $B = K = 0$ and it is evident that

$$\Phi(z)_{r=0} = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)} (1+z^2)^{-\frac{s}{2}}$$

which is the well known result originally obtained by " Student " (*) in 1908, and later verified by R. A. Fisher (**), for the distribution of z for pure random sampling from a normal population.

IV. — The product moments and simultaneous distribution of $\bar{\mu}_{11}$ and $\bar{\mu}_{02}$ and the distribution of the correlation coefficient involving matched variates.

1. *The product moments of $\bar{\mu}_{11}$ and $\bar{\mu}_{02}$ and their simultaneous distribution.*

Consider a sample of s items drawn as previously described, and let $\bar{\mu}_{02}$ and $\bar{\mu}_{20}$ be defined as in section 1 of Part III, and also let,

$$\bar{\mu}_{11} = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = \frac{1}{s}\Sigma uv - \frac{1}{s}\Sigma u \Sigma v.$$

As before, $\bar{\mu}_{20}$ is constant from sample to sample, but $\bar{\mu}_{02}$ and $\bar{\mu}_{11}$ are subject to sampling fluctuations. Thus, our purpose here is to find the moment $M_{kl} = E(\bar{\mu}_{02}^k \bar{\mu}_{11}^l)$ and the simultaneous distribution of $\bar{\mu}_{11}$ and $\bar{\mu}_{02}$.

(*) " Student ", loc. cit. p. 8.

(**) R. A. Fisher. *Applications of " Student's " Distribution*, « Metron », Vol. 5, No. 3, 1925, pp. 91-93.

We can write as the generating function $\varphi(\beta, \nu)$ of the moments M_{kl}

$$\varphi(\beta\nu) = \lambda^s \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} dV \tag{74}$$

where

$$-\tau = -\frac{1}{2\mu_y} \sum_{i=1}^{s} \left[v_i - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} u_i \right]^2 + \beta\bar{\mu}_{02} + \nu\bar{\mu}_{11}$$

and

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\mu_y}} \quad , \quad \mu_y = \sigma_y^2 (1 - r^2),$$

or writing τ in abbreviated form,

$$-\tau = -p\Sigma v^2 - 2q\Sigma v v^1 + 2a\Sigma v u - 2b\Sigma u \Sigma v - p^1 \Sigma u^2 \tag{75}$$

where

$$p = \frac{1}{2\mu_y} - \frac{\beta}{s} + \frac{\beta}{s^2} \qquad b = \frac{\nu}{2s^2}$$

$$q = \frac{\beta}{s^2} \qquad p^1 = \frac{r^2}{2\mu_x} .$$

$$a = \frac{\nu}{2s} + \frac{r}{2\sqrt{\mu_x \mu_y}}$$

ROMANOVSKY (*) has essentially given the evaluation of the integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} dV$$

as

$$I = \sqrt{\frac{\pi^s}{(p-q)^{s-1}(p+\overline{s-1}\,q)}}\, e^{\bar{\tau}} \tag{76}$$

where

$$\bar{\tau} = -p^1 \Sigma u^2 + \left(\frac{a^2}{p-q}\right) \Sigma u^2 + \left[\frac{a^2}{p_{s-1}} - \frac{a^2}{p-q} + \frac{s\,b^2 - 2\,a\,b}{p+\overline{s-1}\,q}\right] (\Sigma u)^2$$

and p_{s-1} has the value as given in (39)

(*) ROMANOVSKY, loc., cit. pp. 27-30.

Substituting (76) in (74) and the values of p, q, a, λ, p' ad p_{s-1} we get after some reduction,

$$\varphi(\beta, \nu) = \left(1 - 2\frac{\beta}{s}\mu_y\right)^{-\frac{s-1}{2}} e^{\Psi}$$

where

$$\Psi = \frac{2\mu_y}{\left(1 - 2\frac{\beta}{s}\mu_y\right)}\left(\frac{\nu^2}{4s} + \frac{\nu r}{2\sqrt{\mu_x \mu_y}} + \frac{\beta r^2}{2\mu_x}\right)\bar{\mu}_x$$

Now, let

$$A = \frac{s}{2\mu_y} \quad , \quad C = \frac{r s}{2\sqrt{\mu_x \mu_y}} \quad , \quad a = \frac{s-1}{2}$$

and we have the form

$$\varphi(\beta, \nu) = A^a (A - \beta)^{-a} e^{-\frac{C^2}{A}\bar{\mu}_x + \frac{\left(\frac{\nu}{2} + C\right)^2}{A - \beta}\bar{\mu}_x}. \tag{77}$$

Since A is a positive number, it is clear that $\varphi(\beta, \nu)$ exists for sufficiently small values of β and is continuous in β and ν in the neighborhood of $\beta = 0$, and has all of its derivatives with respect to β and ν continuous at $\beta = \nu = 0$.

We are now able to find the distribution of $\bar{\mu}_{02}$ and $\bar{\mu}_{11}$. For this purpose let $\eta = \bar{\mu}_{02}$, $\xi = \bar{\mu}_{11}$ and $f(\eta, \xi)$ the distribution function of η and ξ. Thus $f(\eta, \xi)$ must satisfy the integral equation,

$$\int_0^{\infty} \int_{-b}^{+b} f(\eta, \xi)\, e^{\beta\eta + \nu\xi}\, d\xi\, d\eta = \varphi(\beta, \nu) \tag{78}$$

where $b = \sqrt{\eta \bar{\mu}_x}$. That these are the limits of integration with respect to ξ, follows from the fact that $r^2 = \dfrac{\xi^2}{\eta \bar{\mu}_x} \leqq 1$.

It is evident that $f(\eta, \xi)$ is a function of A and C and hence (using abbreviated notation),

$$\begin{cases} \displaystyle\int\int \frac{\partial f}{\partial A} e^{\beta\eta + \nu\xi}\, d\xi\, d\eta = \left(\frac{a}{A} - \frac{a}{A - \beta} - \frac{\left(\frac{\nu}{2} + C\right)^2}{(A - \beta)^2}\bar{\mu}_x + \frac{C^2}{A^2}\bar{\mu}_x\right)\varphi(\beta, \nu) \\ \displaystyle\int\int \frac{\partial f}{\partial C} e^{\beta\eta + \nu\xi}\, d\xi\, d\eta = \left(-\frac{2C}{A}\bar{\mu}_x + \frac{2\left(\frac{\nu}{2} + C\right)}{A - \beta}\bar{\mu}_x\right)\varphi(\beta, \nu) \end{cases} \tag{79}$$

also

$$(80)\quad \begin{cases} \int\int \eta f e^{\beta\eta+\nu\xi}\, d\xi\, d\eta = \left(\dfrac{1}{A-\beta}+\dfrac{\left(\frac{\nu}{2}+C\right)^2}{(A-\beta)^2}\bar{\mu}_x\right)\varphi(\beta,\nu) \\ \int\int \xi f e^{\beta\eta+\nu\xi}\, d\xi\, d\eta = \left(\dfrac{\left(\frac{\nu}{2}+C\right)}{A-\beta}\bar{\mu}_x\right)\varphi(\beta,\nu). \end{cases}$$

From (78, 79, 80) we obtain the following system of equations,

$$(81)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial A}+\eta f-\left(\dfrac{a}{A}+\dfrac{C^2}{A^2}\bar{\mu}_x\right)f=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial C}-2\xi f+\dfrac{2C}{A}\bar{\mu}_x f=0. \end{cases}$$

From the first we get

$$f=\psi(\eta,\xi)\, A^a\, e^{-\frac{C^2}{A}\bar{\mu}_x-\eta A}$$

and from the second

$$f=\Omega(\eta,\xi)\, e^{2\xi C-\frac{C^2}{A}\bar{\mu}_x}$$

and from these two forms, we conclude that

$$(82)\qquad f(\eta,\xi)=A^a\,\Phi(\eta,\xi)\, e^{-\eta A+2\xi C-\frac{C^2}{A}\bar{\mu}_x}.$$

To determine $\Phi(\eta,\xi)$, let us place this value of $f(\eta,\xi)$ in (78). Thus,

$$(83)\quad \int_0^{\infty}\int_{-b}^{b}\Phi(\eta,\xi)\, e^{-(A-\beta)\eta+(2C+\nu)\xi}\, d\xi\, d\eta=(A-\beta)^{-a}\, e^{\frac{\left(\frac{\nu}{2}+C\right)^2}{A-\beta}\bar{\mu}_x}.$$

Let $\xi=t\sqrt{\eta\bar{\mu}_x}$, then $d\xi=dt\sqrt{\eta\bar{\mu}_x}$ and the limits of integration for t are -1 to $+1$, hence,

$$(84)\quad \int_0^{\infty} d\eta\int_{-1}^{+1}\Phi(\eta,t\sqrt{\eta\bar{\mu}_x})\, e^{-(A-\beta)\eta+(2C+\nu)t\sqrt{\eta\bar{\mu}_x}}\sqrt{\eta\bar{\mu}_x}\, dt=$$

$$=(A-\beta)^{-a}\, e^{\frac{\left(\frac{\nu}{2}+C\right)^2}{A-\beta}\bar{\mu}_x}.$$

If we set $\nu = -2C$, we note that

$$\int_0^\infty d\eta \int_{-1}^{+1} \Phi(\eta, t\sqrt{\eta\bar{\mu}_x})\, e^{-(A-\beta)\eta\sqrt{\eta\bar{\mu}_x}}\, dt = (A-\beta)^{-a} \tag{85}$$

which is clearly satisfied when $\Phi(\eta, t\sqrt{\eta\bar{\mu}_x})$ is of the form $\eta^{a-\frac{3}{2}}\theta(t)$ where $\theta(t)$ is an even function of t.

In order to determine $\theta(t)$, let us replace $\Phi(\eta, t\sqrt{\eta\bar{\mu}_x})$ in (84) by the form just given and expand the terms $e^{(2C+\nu)t\sqrt{\eta\bar{\mu}_x}}$ and $e^{\frac{\left(\frac{\nu}{2}+C\right)^2}{(A-\beta)}\bar{\mu}_x}$ into series. We get,

$$\int_0^\infty d\eta \int_{-1}^{+1} \eta^{a-1}\theta(t)\, e^{-(A-\beta)\eta} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(2C+\nu)^h}{h!} (\bar{\mu}_x)^{\frac{h+1}{2}} t^h \eta^{\frac{h}{2}}\, dt =$$

$$= (A-\beta)^{-a} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\nu}{2}+C\right)^{2h}}{h!\,(A-\beta)^h} \bar{\mu}_x^h. \tag{86}$$

Since $\theta(t)$ is an even function of t, the left member of (86) can be written in the form,

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(2C+\nu)^{2h}}{(2h)!} (\bar{\mu}_x)^{\frac{2h+1}{2}} \int_0^\infty \eta^{a+h-1} e^{-(A-\beta)\eta}\, d\eta \int_{-1}^{+1} \theta(t)\, t^{2h}\, dt =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(2C+\nu)^{2h}}{(2h)!} (\bar{\mu}_x)^{\frac{2h+1}{2}} (A-\beta)^{-(a+h)} \Gamma(a+h) \int_{-1}^{+1} \theta(t)\, t^{2h}\, dt. \tag{87}$$

Substituting this in (86) we have

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(2C+\nu)^{2h}}{(2h)!} (\bar{\mu}_x)^{\frac{2h+1}{2}} (A-\beta)^{-(a+h)} \Gamma(a+h) \int_{-1}^{+1} \theta(t)\, t^{2h}\, dt =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(2C+\nu)^{2h}}{h!\, 2^{2h}} (\bar{\mu}_x)^h (A-\beta)^{-(a+h)} \tag{88}$$

wherefrom, we deduce by equating coefficients of the same powers of $(2C+\nu)$,

$$\int_{-1}^{+1} \theta(t)\, t^{2h}\, dt = \frac{(2h)!}{2^{2h} h!\sqrt{\bar{\mu}_x}\, \Gamma(a+h)}.$$

But it is well known that,

$$\frac{(2h)!}{2^{2h}h!} = \frac{\Gamma\left(\frac{2h+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

and therefore

$$(89)\qquad \int_{-1}^{+1} \theta(t)\, t^{2h}\, dt = \frac{\Gamma\left(\frac{2h+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)}{\sqrt{\bar{\mu}_x}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+2h-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)}$$

But

$$(90)\qquad \int_{-1}^{+1} t^{2h}(1-t^2)^{\beta}\, dt = \frac{\Gamma\left(\frac{2h+1}{2}\right)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\frac{2h+2\beta+3}{2}\right)}.$$

Since (89, 90) held for all positive integral values of h and since $\theta(t)$ is an even function, it follows from Stekloff's application of the theory of closure to certain problems concerning moments that

$$\theta(t) = \frac{(1-t^2)^{\frac{s-4}{2}}}{\sqrt{\bar{\mu}_x}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)}$$

Hence, we finally have,

$$(91)\qquad \Phi(\eta, \xi) = \frac{(\bar{\mu}_x \eta - \xi^2)^{\frac{s-4}{2}}}{(\bar{\mu}_x)^{\frac{s-3}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)}$$

and from (82, 91) the complete solution is

$$(92)\qquad f(\eta, \xi) = \frac{A^{\frac{s-1}{2}}\, e^{-\eta A + 2\xi C - \frac{C^2}{A}\bar{\mu}_x}}{(\bar{\mu}_x)^{\frac{s-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)}\,(\bar{\mu}_x \eta - \xi^2)^{\frac{s-4}{2}}.$$

It can be readily verified that

$$\int_0^{\infty} \int_{-b}^{+b} f(\eta, \xi)\, d\xi\, d\eta = 1$$

and that $f(\eta, \xi)$ given above, satisfied (78).

Let us consider the moments M_{kl} for $f(\eta, \xi)$. We have,

$$M_{kl} = K \int_0^{\infty} d\eta \int_{-b}^{+b} \eta^k \xi^l e^{-\eta A + 2C\xi} (\bar{\mu}_x \eta - \xi^2)^{a-\frac{3}{2}} d\xi$$

where, as before, $b = \sqrt{\eta \bar{\mu}_x}$, and $K = \dfrac{A^a e^{-\frac{C^2}{A}\bar{\mu}_x}}{\bar{\mu}_x^{a-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(a - \frac{1}{2}\right)}$, $\left(a = \dfrac{s-1}{2}\right)$.

Also, we may write,

$$(93) \qquad M_{kl} = \left[\frac{\partial^l}{\partial \nu^l} K \int_0^{\infty} \int_{-b}^{b} \eta^k e^{-\eta A + (2C+\nu)\xi} (\bar{\mu}_x \eta - \xi^2)^{a-\frac{3}{2}} d\xi\right]_{\nu=0}.$$

In the expression

$$\int_{-b}^{b} e^{(2C+\nu)\xi} (\bar{\mu}_x \eta - \xi^2)^{a-\frac{3}{2}} d\xi$$

let $\xi = t\sqrt{\eta \bar{\mu}_x}$ and expand $e^{(2C+\nu)\xi}$ into its series. We get,

$$2(\bar{\mu}_x \eta)^{a-1} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(2C+\nu)^{2h} (\bar{\mu}_x \eta)^h}{(2h)!} \int_0^1 t^{2h} (1-t^2)^{a-\frac{3}{2}} dt =$$

$$= (\bar{\mu}_x \eta)^{a-1} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(2C+\nu)^{2h} (\bar{\mu}_x \eta)^h}{(2h)!} \cdot \frac{\Gamma\left(a - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2h+1}{2}\right)}{\Gamma(a+h)}.$$

Substituting this expression in (93) and integrating with respect to η, we get after reduction,

$$(94) \quad M_{kl} = A^{-k} e^{-\frac{C^2}{A}\bar{\mu}_x} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2h} h!} \frac{\Gamma(a+h+k)}{\Gamma(a+h)} \left(\frac{\bar{\mu}_x}{A}\right)^h \left[\frac{\partial^l (2C+\nu)^{2h}}{\partial \nu^l}\right]_{\nu=0}.$$

2. *Moments and distribution of the correlation coefficient between the matched and the unmatched variate.*

It is evident from (94) that M_{kl} exists for those negative values of k for which $a + k > 0$ or $s - 1 + 2k > 0$ $\left(\text{since } a = \dfrac{s-1}{2}\right)$, and thus we are able to find those moments of the correlation coefficient

$\bar{r}$ between the matched and the unmatched variates, which exist. If we denote by $M_n(\bar{r})$ the n-th moment of $\bar{r}$, where $\bar{r} = \frac{\xi}{\sqrt{\eta \bar{\mu}_x}}$, it is clear that

$$M_n(\bar{r}) = M_{-\frac{n}{2}, n} \cdot \bar{\mu}_x^{-\frac{n}{2}}$$

and therefore

$$(95)\quad M_n(\bar{r}) = \frac{A^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{C^2}{A}\bar{\mu}_x}}{\bar{\mu}_x^{\frac{n}{2}}} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{s+2h-n-1}{2}\right)}{2^{2h} h!\, \Gamma\left(\frac{s+2h-1}{2}\right)} \left(\frac{\bar{\mu}_x}{A}\right)^h \left[\frac{\delta^n (2C+\nu)^{2h}}{\delta \nu^n}\right]_{\nu=0}.$$

To find the distribution $S(\rho)$ of ρ, where $\rho = \bar{r}$, consider $f(\eta, \xi)\, d\eta\, d\xi$ as given in (92) and let $\xi = \rho\sqrt{\eta \bar{\mu}_x}$, and $d\xi = d\rho \sqrt{\eta \bar{\mu}_x}$. We therefore have,

$$(96)\quad S(\rho)\, d\rho = K (1-\rho^2)^{\frac{s-4}{2}} d\rho \int_0^{\infty} e^{-\eta A + 2C\rho\sqrt{\eta \bar{\mu}_x}} (\bar{\mu}_x \rho)^{\frac{s-3}{2}} d\eta.$$

Placing $\eta = \frac{t^2}{A}$ in (96) we find

$$(97)\quad S(\rho) = \frac{2(1-\rho^2)^{\frac{s-4}{2}} e^{-\frac{C^2}{A}\bar{\mu}_x (1-\rho^2)}}{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-\left(t - \frac{C\bar{\mu}_x}{\sqrt{A}}\rho\right)^2} t^{s-2}\, dt.$$

If the correlation coefficient r between x and y in the population is 0, then $C = 0$, and we get the distribution of the correlation coefficient of samples drawn from a normally distributed population with two variates in which the correlation coefficient between the variates is zero. That is,

$$S(\rho)_{r=0} = \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)} (1-\rho^2)^{\frac{s-4}{2}}$$

a result first suggested by "Student" in 1908.

3. *Expected value and mean error of the correlation coefficient.*

We have found an expression for the n-th moment of the correlation coefficient r, which is given by (95). From this expression we are able to derive an expression for $\sigma_{\bar{r}}$. Now,

$$\sigma_{\bar{r}}^2 = M_2 - M_1^2$$

and from (95),

$$(98)\quad M_1 = \left(\frac{A}{\bar{\mu}_x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{C^2}{A}\bar{\mu}_x} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{s-2+2h}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s-1+2h}{2}\right) 2^{2h} h!} \left(\frac{\bar{\mu}_x}{A}\right)^h . 2h\,(2C)^{2h-1}.$$

But $\frac{C^2}{A}\bar{\mu}_x = \lambda \cdot \frac{s}{2}$ where $\lambda = \frac{r^2 \bar{\mu}_x}{\mu_x}$.

Therefore,

$$M_1 = \left(\frac{2}{s\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \cdot \frac{s}{2}\lambda e^{-\frac{\lambda s}{2}} \left[1 + \frac{\left(a+\frac{1}{2}\right)}{(a+1)} \cdot \frac{s\lambda}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{3}{2}\right)}{2!\,(a+1)\,(a+2)} \left(\frac{s\lambda}{2}\right)^2 + \ldots \right].$$

where $a = \frac{s-1}{2}$.

But, by Kummer's relation

$$e^{-\frac{\lambda s}{2}} \left[1 + \frac{\left(a+\frac{1}{2}\right)}{(a+1)} \frac{s\lambda}{2} + \frac{\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{3}{2}\right)}{2!\,(a+1)\,(a+2)} \left(\frac{s\lambda}{2}\right)^2 + \ldots \right] =$$

$$= \left[1 - \frac{\frac{1}{2}}{(a+1)} \frac{s\lambda}{2} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!\,(a+1)\,(a+2)} \left(\frac{s\lambda}{2}\right)^2 \right.$$

$$\left. - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{3!\,(a+1)\,(a+2)\,(a+3)} \left(\frac{s\lambda}{2}\right)^3 + \ldots \right].$$

Hence

$$(99)\quad M_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\sqrt{\frac{s\lambda}{2}}}{\frac{s-1}{2}\,\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}\left[1 - \frac{\frac{1}{2}\lambda}{1+\frac{1}{s}} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\lambda^2}{\left(1+\frac{1}{s}\right)\left(1+\frac{3}{s}\right)2!} - \cdots\right]$$

which converges for all values of λ when s is finite. In order to express the series in (99) in powers of $\frac{1}{s}$ let us write $\frac{1}{s} = x$ and call the series $f(x)$ and expand $f(x)$ into Taylor's series at $x = 0$ $(s = \infty)$. Thus,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots$$

and it is easy to verify that

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} \qquad (\lambda < 1)$$

$$f'(0) = -\frac{3}{4}\lambda^2(1+\lambda)^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}\lambda(1+\lambda)^{-\frac{3}{2}} \qquad (\lambda < 1)$$

Hence

$$(100)\quad M_1 = \left(\frac{\lambda s}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{2}{s-1}\,\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}(1+\lambda)^{-\frac{1}{2}}\left[1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{s}\left(\frac{\lambda}{2(1+\lambda)} - \frac{3\lambda^2}{4(1+\lambda)^2}\right) + \cdots\right].$$

For M_2, we have,

$$M_2 = \left(\frac{A}{C^2\bar{\mu}_x}\right)e^{-\frac{C^2}{A}\bar{\mu}_x}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{s-3}{2}+h\right)}{2^{2h}h!\,\Gamma\left(\frac{s-1}{2}+h\right)}\left(\frac{\bar{\mu}_x}{A}\right)^h 2h(2h-1)(2C)^{2h-2}$$

which reduces, after applying Kummer's formula, to

$$M_2 = \frac{1}{s-1} + \frac{s-2}{s^2-1}\cdot s\lambda\left[1 - \frac{\lambda}{1+\frac{3}{s}} + \frac{\lambda^2}{2!\left(1+\frac{3}{s}\right)\left(1+\frac{5}{s}\right)} - \cdots\right].$$

Expressing the series in powers of $\frac{1}{s}$, we have

$$(101)\quad M_2 = \frac{1}{s-1} + \frac{s(s-2)}{s^2-1}\lambda\left[\frac{1}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{s}\left(3 - \frac{s\lambda}{1+\lambda} + \frac{2\lambda^2}{(1+\lambda)^2}\right) + \dots\right].$$

Thus, from (100, 101), we get as the first approximation to $\sigma_{\bar{r}}^2$,

$$\sigma_{\bar{r}}^2 = \frac{1}{s-1} + \frac{s(s-2)}{s^2-1}\cdot\lambda\left[\frac{1}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{s}\left(3 - \frac{5\lambda}{1+\lambda} + \frac{2\lambda^2}{(1+\lambda)^2}\right)\right] -$$

$$-\frac{\lambda s}{2}\cdot\frac{4}{(s-1)^2}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{s-1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{1+\lambda}\left[1 + \frac{\lambda}{s}\left(\frac{1}{1+\lambda} - \frac{3\lambda}{(1+\lambda)^2}\right)\right]$$

which gives after simplification (neglecting term of order $\frac{1}{s^2}$ and higher),

$$(102)\quad \sigma_{\bar{r}} = \sqrt{\frac{2+\lambda}{2s(1+\lambda)^3}} = (1-r^2)\sqrt{\frac{2 + r^2\left(\frac{\bar{\mu}_x}{\sigma_x^2} - 2\right)}{2s\left(1 + r^2\left(\frac{\bar{\mu}_x}{\sigma_x^2} - 1\right)\right)}}.$$

If the distribution of the x's is chosen from a random sample of the x-population, we have,

$$E(\bar{\mu}_x) = \frac{s-1}{s}\sigma_x^2$$

Placing this value in (102), remarking that $\lambda = \frac{r^2\bar{\mu}_x}{\sigma_x^2(1-r^2)}$ we get, except for terms of order $\frac{1}{s}$ and higher,

$$(103)\quad \sigma_{\bar{r}} = \frac{(1-r^2)}{\sqrt{s}}\sqrt{1 - \frac{r^2}{2}}.$$

Referring again to (100), we have as the expected value $E(\bar{r})$ of $\bar{r}$, after some reduction,

$$(104)\quad E(\bar{r}) = \frac{s}{s-1}\sqrt{\frac{\lambda}{1+\lambda}}\left[1 - \frac{1}{4s}\frac{(4\lambda^2 + 4\lambda + 3)}{(1+\lambda)^2} + \dots\right]$$

If the distribution of the x's is random, we have as the first approximation,

$$E(\bar{r}) = \frac{s}{s-1}\sqrt{\frac{s-r}{s-r^2}}\, r. \tag{105}$$

4. *Distribution of the regression coefficient of the unmatched variate on the matched variate.*

By definition, the regression coefficient of y on x calculated from a sample is

$$\bar{\rho}_{yx} = \bar{r}\frac{\sqrt{\bar{\mu}_{02}}}{\sqrt{\bar{\mu}_{20}}} \qquad \text{where } \bar{r} = \frac{\bar{\mu}_{11}}{\sqrt{\bar{\mu}_{20}\bar{\mu}_{02}}}$$

that is,

$$\bar{\rho}_{yx} = \frac{\bar{\mu}_{11}}{\bar{\mu}_{20}}$$

where $\bar{\mu}_{20} = \bar{\mu}_x$ is constant. Then the generating function of the moments of $\bar{\mu}_{11}$ is the same as that for $\bar{\mu}_{11}$ and $\bar{\mu}_{02}$ with $\beta = 0$. Thus, it follows from (77) that if $f(x)$ is the distribution of u_{11}, it must be the solution of the integral equation

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{\nu x}\, dx = e^{\nu^2 \frac{\bar{\mu}_x \mu_y}{2s} + \nu r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}} \tag{106}$$

which is identical, in form, with equation (12) and hence its solution is easily found to be

$$f(x) = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2\pi\mu_y\bar{\mu}_x}}\, e^{-\frac{s}{2\mu_y\bar{\mu}_x}\left[x - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\bar{\mu}_x\right]^2}. \tag{107}$$

The distribution function $F(y)$ for y where $y = \bar{\rho}_{yx}$ is found by setting $y = \frac{x}{\bar{\mu}_x}$ in (107). Hence, we find,

$$F(y) = \frac{\sqrt{s\,\bar{\mu}_x}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{s\bar{\mu}_x}{2\sigma_y^2(1-r^2)}\left(y - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\right)^2}. \tag{108}$$

From this it is evident that

$$E(\bar{\rho}_{yx}) = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \qquad \sigma_{\bar{\rho}_{yx}} = \frac{\sigma_y\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{s\,\bar{\mu}_x}}.$$

If the distribution of the x's is chosen from a random sample,

$$\sigma_{\bar{\rho}_{xy}} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{s-1}}.$$

V. — Conclusion.

In this paper, the author has been primarily concerned with the moments, distributions, standard errors and expected values of the most inportant statistics belonging to a variate y for samples in which the distribution of a correlated variate x is made identical, item by item, with a given ditribution, independently of the y's. Except at two points, no attempt has been made to generalize the results by considering a more general type of such sampling than that described for two variates. The two generalizations that have been made are given in section 4 of Part II and section 2 of part III, where, instead of matching the sample with respect to one variate, it was considered as matched with respect to $n - 1$ variates, all of which were assumed to be inter-correlated and normally distributed. Thus, expressions were found for the distributions of the mean and standard deviation of the unmatched variate.

Results of theoretical interest that have been obtained and presented in this paper include the distributions and moments of the means, weighted mean, difference and sum of means, sum of the variates, difference of sums of the variates for two samples, other linear functions of the unmatched variate, standard deviation, " Student's " z, correlation coefficient and regression coefficient in samples involving matched variates.

On the other hand, results of special interest to the practical statistician dealing with this type of sampling are the standard errors and expected values of these statistics, which have been presented at the appropriate points for the case in which the distribution of the matched variate is an arbitrary distribution and also for the case in which the distribution upon which the x's are matched is randomly selected, that is, selected from a sample drawn purely at random from the population of x's.

BRUNO DE FINETTI

Sulla legge di probabilità degli estremi

SUNTO. — Si considera la legge di probabilità del massimo (minimo) valore fra quelli di n variabili casuali indipendenti seguenti la stessa legge, e se ne studia specialmente il comportamento asintotico al crescere di n.

Si usa spesso, fra le caratteristiche salienti di una distribuzione statistica, annoverare i valori estremi fra cui è compresa; si presenta quindi spontanea la domanda se tali estremi possano dare un'indicazione significativa, o se il loro valore sia largamente soggetto al capriccio del caso.

Nel presente lavoro tale questione sarà trattata riferendoci alle variabili casuali; con un po' di precauzione e di buon senso, i risultati potranno anche essere utilizzati per dare, almeno qualitativamente, una risposta alla questione accennata di statistica, o, per dir meglio, un'indicazione di carattere informativo di cui si potrà tener conto nel formarsi un'opinione. La conclusione pratica è che, nel caso di una distribuzione molto numerosa, il valore degli estremi si può determinare con molta probabilità di buona approssimazione purchè la legge di decrescenza della probabilità sia sufficientemente rapida.

1. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono variabili casuali indipendenti soggette a una stessa legge di probabilità, ed è $= p$ la probabilità che una qualunque di esse non superi il valore ξ, sarà p^n la probabilità che nessuna di esse superi il valore ξ. Detta $\Phi(\xi)$ la legge di probabilità (funzione di ripartizione) relativa ad $X_1, X_2, \ldots, X_n$, sarà allora $\Phi^n(\xi)$ la legge di probabilità della massima, M_n, fra le n variabili $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (a meno eventualmente dei punti di discontinuità, ove deve prendersi la semisomma dei due limiti destro e sinistro).

Se $\Phi(\xi)$ è derivabile, si pone $\frac{d}{d\xi}\Phi(\xi) = \varphi(\xi)$, e la $\varphi(\xi)$ si dice densità di probabilità; in tal caso è derivabile anche $\Phi^n(\xi)$, ed è $\varphi_n(\xi) = \frac{d}{d\xi}\Phi^n(\xi) = n\,\Phi^{n-1}(\xi)\,\varphi(\xi)$ la densità di probabilità della variabile massima.

Ponendo ad esempio

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

risulterà uguale a

$$\varphi_n(\xi)\, d\xi = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz \right]^{n-1} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, d\xi$$

la probabilità che il massimo (in valore relativo) di n errori gaussiani ridotti (origine = valor medio ; unità di misura = scostamento quadratico medio) sia compreso fra $\xi \pm \frac{1}{2} d\xi$ *. La tabella I dà le prime 6 cifre decimali arrotondate dei valori di $\varphi_n(\xi)$ per tutti i valori di ξ di 0,1 in 0,1 fra $-3{,}5$ e $+4$, e per $n = 1, 2, \ldots, 10$ **. Osserviamo che era inutile prolungare la tabella fuori di questi limiti, perchè per $\xi < -3{,}5$, $\xi > 4$, $(n = 2,3,\ldots,10)$, si può porre rispettivamente $\varphi_n(\xi) = 0$, $\varphi_n(\xi) = n\varphi(\xi)$ con errore che non influisce sulle prime 6 cifre decimali. I valori ottenuti sono illustrati dai diagrammi della Figura.

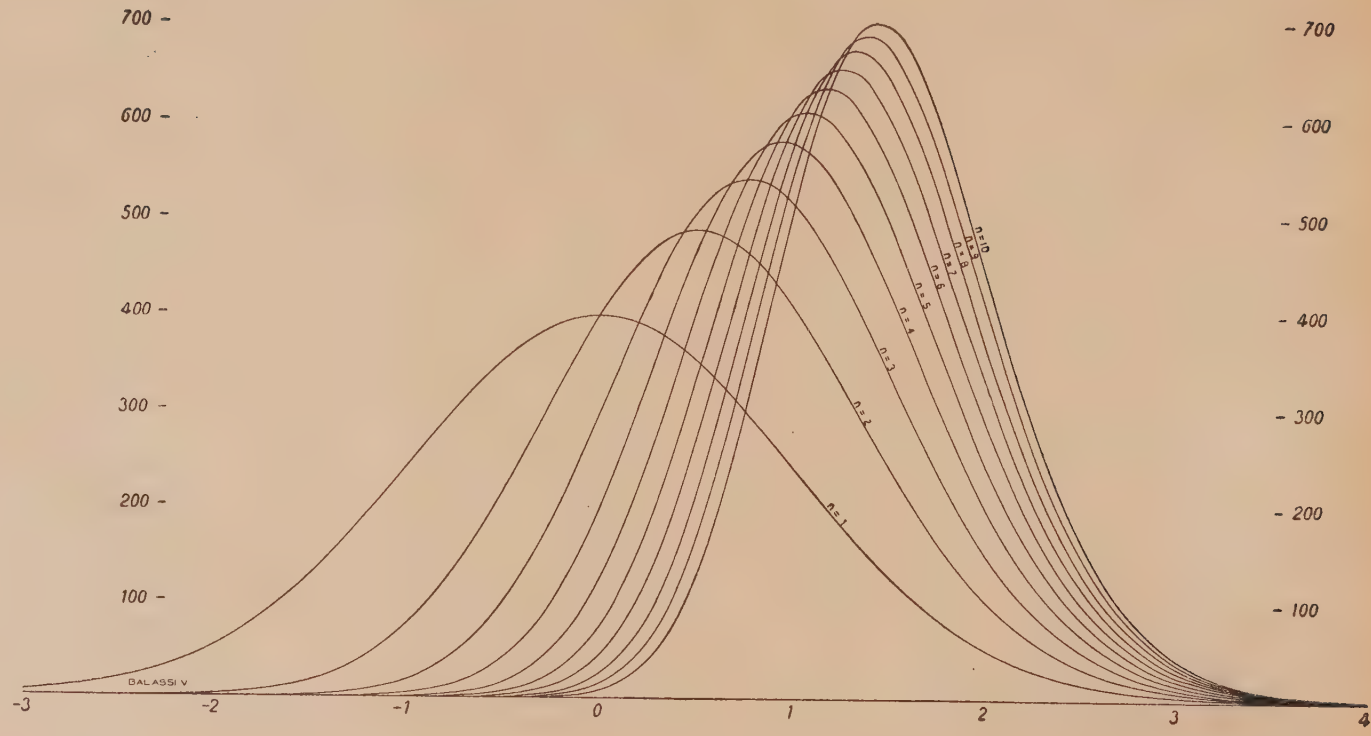
2. Un fatto che colpisce, osservando tali diagrammi, è che, al crescere di n, essi tendono sempre più a rinserrarsi e innalzarsi, di modo che gran parte dell'area della curva φ_{10} è compresa fra due valori abbastanza vicini dell'ascissa, mentre che la curva φ_1, e in minor misura le successive $\varphi_2\, \varphi_3\, \varphi_4 \ldots$, sono molto più allargate.

Il fatto è anche interessante perchè, se le curve, al crescere di n, si rinserrano sempre più, vuol dire che il valore della determinazione estrema su n variabili si può prevedere con quanta approssimazione e sicurezza si vuole pur di prendere n sufficientemente grande.

---

* V. es. analoghi in BERTRAND, *Calcul des probabilités*, pp. 198 e sgg. Si noti però che il BERTRAND parla dell'*errore* massimo in valore assoluto, mentre anche quando parliamo del caso particolare della legge normale, che noi prendiamo come esempio, ci riferiamo sempre al *valore* massimo.

** I calcoli sono stati eseguiti servendosi delle Tavole del PEARSON.


700
600
500
400
300
200
100
n=10
n=9
n=8
n=7
n=6
n=5
n=4
n=3
n=2
n=1
BALASSI V
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

Basterebbe evidentemente, in tal caso, calcolare il valore mediano ξ_n della legge Φ^n $\left(\xi_n \text{ tale che } \Phi^n(\xi_n) = \frac{1}{2}, \text{ ossia } \Phi(\xi_n) = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)$: se esistesse un intervallo di lunghezza ε e con probabilità $1-\theta\left(>\frac{1}{2}\right)$ di contenere M_n, sarebbe certo che ξ_n vi apparterrebbe, e si avrebbe quindi probabilità non minore di $1-\theta$ di avere $|M_n - \xi_n| < \varepsilon$. Ossia, pur di fissare n sufficientemente grande, la differenza $M_n - \xi_n$ si potrebbe far tendere a zero, nel senso del calcolo delle probabilità. E la tabella che dà i valori di ξ_n relativi a una certa legge Φ darebbe quindi (per n grande) un valore quasi certamente assai prossimo a quello della prova estrema.

La tabella II dà appunto i valori di ξ_n, per un insieme abbastanza esteso di valori di n, relativamente alla legge normale ridotta (valor medio $= 0$, scostamento quadratico medio $= 1$). Dà cioè, per ogni n indicato, il numero ξ_n tale che $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi_n} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ (calcolato usando le Tavole del PEARSON).

Un esempio potrà chiarire lo scopo della ricerca.

Consideriamo la frequenza delle estrazioni dei diversi (90) numeri del lotto, nelle otto ruote e nel complesso, dalla fondazione (1682, per la ruota più antica) fino al 1913 *. Essa è una variabile casuale che, essendo il numero m delle estrazioni molto grande, segue praticamente la legge normale di GAUSS (valore medio $p = \frac{5}{90}$, scostamento quadratico medio $\sigma = \sqrt{\frac{5 \times 85}{90^2\, m}}$). Le frequenze dei 90 numeri non sono, in realtà, indipendenti, ma l'interdipendenza è trascurabile. Il valore mediano della massima e della minima frequenza è quindi rispettivamente $p + \xi_{90}\sigma$ e $p - \xi_{90}\sigma$ ($\xi_{90} = 2{,}4242$); se si verifica la circostanza che l'esame della figura ci ha fatto sembrar verosimile, e che effettivamente in seguito dimostreremo, lo scarto dal valore mediano così determinato dev'essere piccolo, e si può quindi attendere

* I dati sono ricavati da O. DA FIORENZA, *Tutto il gioco del lotto.*

con certezza pratica che le frequenze massima e minima abbiano praticamente a coincidere con $p + \xi_{90}\,\sigma$ e $p - \xi_{90}\,\sigma$.

Per la ruota di Palermo, su $m = 4936$ estrazioni, era ad esempio a prevedere in tal senso, come probabile numero massimo e minimo di estrazioni, 313 e 235: effettivamente, degli $n = 90$ numeri, il **19**, numero di massima frequenza, è sortito 313 volte, e il **59** e l'**86**, numeri di frequenza minima, sono sortiti 235 volte. Per le altre ruote e il complesso l'accordo non è così perfetto, ma sempre però soddisfacente, come mostra la tabella che segue.

Numeri di massima e minima frequenza in un'indagine sul gioco del lotto.

Ruota	Estrazioni m	Scostamento quadratico medio teorico $\sqrt{\frac{5 \times 85}{90^2\, m}}$	Numeri usciti con massima e minima frequenza					
			Massima			Minima		
			Frequenza osservata / Frequenza calcolata	*Numero estrazioni* / Id. calcolato	Numero	*Frequenza osservata* / Frequenza calcolata	*Numero estrazioni* / Id. calcolato	Numero
Bari . . .	2.636	4,461.483	*6829* / 6637	*180* / 175	**12**	*4173* / 4474	*110* / 118	**79**
Roma . . .	4.650	3,359.120	*6452* / 6370	*300* / 296	**45**	*4516* / 4741	*210* / 220	**63**
Palermo . .	4.936	3,260.351	*6341* / 6346	*313* / 313	**19**	*4761* / 4765	*235* / 235	**59,86**
Venezia . .	5.208	3,174.070	*6432* / 6325	*335* / 329	**22**	*4762* / 4786	*248* / 249	**32**
Firenze . .	5.455	3,101.377	*6288* / 6307	*343* / 344	**7,60**	*4895* / 4804	*267* / 262	**90**
Napoli . .	5.997	2,957.910	*6370* / 6273	*382* / 376	**6**	*4469* / 4838	*268* / 290	**70**
Milano . .	6.161	2,918.276	*6265* / 6263	*386* / 386	**61**	*4658* / 4848	*287* / 299	**74**
Torino . .	6.767	2,784.543	*6074* / 6230	*411* / 422	**2**	*4936* / 4881	*334* / 330	**22,73**
Tutte . . .	41.810	1,120.242	*5932* / 5827	*2480* / 2436	**12**	*5248* / 5284	*2194* / 2209	**74**

3. Sembra quindi confermata la speranza di poter dimostrare che $M_n - \xi_n$ tende a zero, nel senso del calcolo delle probabilità, quando $n \to \infty$. È quello che ci proponiamo.

E vedremo infatti che la proprietà che ci interessa è vera se la legge Φ sodisfa una condizione poco restrittiva, che è sodisfatta in particolare per la legge normale di GAUSS.

Escludiamo intanto il caso banale in cui le variabili casuali $X_1 \ldots X_n$ sono limitate superiormente. Se L è il loro limite superiore, cioè il limite inferiore dei valori ξ per cui $\Phi(\xi) = 1$, è ovvio che, al crescere di n, si può addirittura dire che ci si avvicina sempre più alla certezza pratica che il massimo valore ottenuto in n prove coincida praticamente con L. Infatti, qualunque sia $\varepsilon > 0$, è $\Phi(L - \varepsilon) < 1$, e quindi, pur di prendere n sufficientemente grande, si può rendere $[\Phi(L - \varepsilon)]^n$ comunque piccolo.

Supporremo dunque che $\Phi(\xi)$ tenda ad 1 senza mai raggiungerlo, e cercheremo sotto quali condizioni si possa affermare che, fissato comunque $\varepsilon > 0$, la probabilità che sia $|M_n - \xi_n| < \varepsilon$ tenda sempre ad 1, ossia si abbia:

$$(1) \qquad [\Phi(\xi_n + \varepsilon)]^n - [\Phi(\xi_n - \varepsilon)]^n \longrightarrow 1 \qquad \text{per } n \longrightarrow \infty ,$$

equivalente alle due

$$(2) \qquad \left.\begin{array}{l} [\Phi(\xi_n - \varepsilon)]^n \longrightarrow 0 \\ [\Phi(\xi_n + \varepsilon)]^n \longrightarrow 1 \end{array}\right\} \qquad \text{per } n \longrightarrow \infty$$

od anche alle

$$(3) \qquad \left.\begin{array}{l} n \log \Phi(\xi_n - \varepsilon) \longrightarrow -\infty \\ n \log \Phi(\xi_n + \varepsilon) \longrightarrow 0 \end{array}\right\} \qquad \text{per } n \longrightarrow \infty .$$

Definiamo la funzione $\nu(\xi)$ ponendo

$$[\Phi(\xi)]^{\nu(\xi)} = \frac{1}{2} \quad , \quad \text{ossia} \quad \nu(\xi) = -\frac{\log 2}{\log \Phi(\xi)} :$$

avremo allora per definizione $\qquad n = \nu(\xi_n) = -\dfrac{\log 2}{\log \Phi(\xi_n)}$,

e le (3) divengono:

$$(4) \qquad \left.\begin{array}{l} \dfrac{\log \Phi(\xi_n - \varepsilon)}{\log \Phi(\xi_n)} \longrightarrow \infty \\ \dfrac{\log \Phi(\xi_n + \varepsilon)}{\log \Phi(\xi_n)} \longrightarrow 0 \end{array}\right\} \qquad \text{per } n \longrightarrow \infty .$$

4. Si osservi che $\nu(\xi) \longrightarrow \infty$ quando $\xi \longrightarrow \infty$, e appare quindi senz'altro che il fatto che, per $\xi \longrightarrow \infty$, l'espressione

$$\frac{\log \Phi(\xi + \varepsilon)}{\log \Phi(\xi)} \qquad (\text{per } \varepsilon \text{ qualunque, } > 0)$$

abbia il minimo (o il massimo) limite nullo, è condizione necessaria (risp. sufficiente), perchè valgano le (4). Riferendoci al caso più semplice, quello in cui esiste il limite: condizione necessaria e sufficiente perchè valga la proprietà che ci interessa è che, per ogni $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{\xi = \infty} \frac{\log \Phi(\xi + \varepsilon)}{\log \Phi(\xi)} = 0. \tag{5}$$

Nel caso che sia Φ derivabile, $\frac{d}{d\xi} \Phi(\xi) = \varphi(\xi)$, possiamo esprimere tale condizione sotto altra forma.

Applicando la regola di L'Hospital:

$$\lim_{\xi = \infty} \frac{\log \Phi(\xi + \varepsilon)}{\log \Phi(\xi)} = \lim_{\xi = \infty} \frac{\frac{\varphi(\xi + \varepsilon)}{\Phi(\xi + \varepsilon)}}{\frac{\varphi(\xi)}{\Phi(\xi)}} =$$

$$= \lim_{\xi = \infty} \frac{\Phi(\xi)}{\Phi(\xi + \varepsilon)} \cdot \lim_{\xi = \infty} \frac{\varphi(\xi + \varepsilon)}{\varphi(\xi)} = \lim_{\xi = \infty} \frac{\varphi(\xi + \varepsilon)}{\varphi(\xi)}$$

(poichè $\lim_{\xi = \infty} \Phi(\xi) = 1$).

Se Φ è derivabile, la condizione si può quindi esprimere:

$$\lim_{\xi = \infty} \frac{\varphi(\xi + \varepsilon)}{\varphi(\xi)} = 0 \qquad (\text{per ogni } \varepsilon > 0). \tag{6}$$

Sotto tale forma è facile vedere che della proprietà di cui ci occupiamo gode in particolare la legge normale.

Ponendo infatti

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

si ha

$$\frac{\varphi(\xi+\varepsilon)}{\varphi(\xi)} = e^{-\frac{1}{2}(\xi+\varepsilon)^2+\frac{1}{2}\xi^2} = e^{-\varepsilon\xi-\frac{1}{2}\varepsilon^2}$$

e

$$(6^1) \qquad \lim_{\xi=\infty} e^{-\varepsilon\xi-\frac{1}{2}\varepsilon^2} = 0 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0 .$$

5. Rimane a studiare l'ordine di grandezza probabile della differenza $|M_n - \xi_n|$. Ci limiteremo al caso della legge normale (di GAUSS), e dimostreremo che è inversamente proporzionale a ξ_n.

Supponiamo infatti nella (6^1) che sia ε variabile, e precisamente $\varepsilon = \frac{u}{\xi}$ (u costante). Ne risulta che

$$e^{-\varepsilon\xi-\frac{1}{2}\varepsilon^2} = e^{-u-\frac{u^2}{2\xi^2}} \longrightarrow e^{-u}$$

e, poichè $\frac{d}{d\xi}(\xi+\varepsilon) = 1 - \frac{u}{\xi^2} \longrightarrow 1$, si ha anche ora

$$\lim_{\xi=\infty} \frac{\log\Phi(\xi+\varepsilon)}{\log\Phi(\xi)} = \lim_{\xi=\infty} \frac{\varphi(\xi+\varepsilon)}{\varphi(\xi)} = e^{-u}$$

e quindi

$$\lim_{\xi=\infty} \left[\Phi(\xi+\varepsilon)\right]^{\nu(\xi)} = e^{-e^{-u}\cdot\log 2}$$

$$\lim_{n=\infty} \left[\Phi\left(\xi_n + \frac{u}{\xi_n}\right)\right]^n = e^{-e^{-u}\cdot\log 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{e^{-u}} .$$

La probabilità che sia $M_n - \xi_n < \frac{u}{\xi_n}$ tende dunque a un limite $\left(\text{e cioè } \left(\frac{1}{2}\right)^{e^{-u}}\right)$ quando $n \longrightarrow \infty$; in altre parole (*), la legge

---

(*) Usando l'indovinata espressione del LÉVY, possiamo dire che la legge di probabilità di M_n (la successione $\Phi, \Phi^2, \Phi^3, \ldots, \Phi^n, \ldots$) tende *verso il tipo* della legge (7) ; si può anche dire che le curve $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n, \ldots$ della figura tendono *ad assumere la forma* della curva d'equazione (8), quando, mediante un'opportuna dilatazione, si compensi lo schiacciamento della curva che altrimenti ne renderebbe la forma stessa di più in più indiscernibile.

TAV. I. — *Probabilità del valore massimo di* n *variabili casuali indipendenti seguenti la legge normale ridotta*

(n = 1, 2, 3, . . . , 10). (Prima parte: Ascisse positive).

ξ	$\varphi_1(\xi)$	$\varphi_2(\xi)$	$\varphi_3(\xi)$	$\varphi_4(\xi)$	$\varphi_5(\xi)$	$\varphi_6(\xi)$	$\varphi_7(\xi)$	$\varphi_8(\xi)$	$\varphi_9(\xi)$	$\varphi_{10}(\xi)$
0,0	398.942	398.942	299.207	199.471	124.669	74.801	43.634	24.934	14.025	7.792
1	396.953	428.572	343.033	249.784	168.550	109.186	68.765	42.424	25.765	15.454
2	391.043	453.031	393.634	304.021	220.134	153.018	103.410	68.458	44.612	28.713
3	381.388	471.328	436.858	359.920	277.998	206.134	148.601	104.940	72.949	50.084
4	368.270	482.744	474.602	414.752	339.797	267.252	204.357	153.074	112.869	82.197
5	352.065	486.880	504.989	465.574	402.409	333.901	269.360	212.860	165.583	127.216
6	333.225	483.673	526.537	509.510	462.219	402.545	340.837	282.698	230.813	186.125
7	312.254	473.400	538.281	544.049	515.511	468.991	414.711	359.276	306.387	258.058
8	289.692	456.638	539.845	567.301	558.894	528.587	486.037	437.791	388.173	339.930
9	266.085	434.219	531.445	578.170	589.689	577.381	549.626	512.528	470.466	426.524
1,0	241.971	407.162	513.845	576.427	606.218	612.046	600.765	577.658	546.760	511.127
1	217.852	376.594	488.254	562.687	607.936	630.552	635.842	628.091	610.741	586.538
2	194.186	343.682	456.202	538.276	595.421	632.288	652.785	660.194	657.254	646.249
3	171.369	309.560	419.392	505.059	570.212	618.018	651.225	672.213	683.035	685.464
4	149.728	275.272	379.563	465.214	534.556	589.665	632.386	664.362	687.049	701.739
5	129.518	241.730	338.371	421.020	491.116	549.967	598.763	638.585	670.413	695.138
6	110.921	209.685	297.291	374.667	442.669	502.093	553.675	598.096	635.986	667.927
7	94.049	179.716	257.560	328.108	391.858	449.273	500.793	546.828	587.766	623.969
8	78.950	152.227	220.136	282.969	341.002	394.500	443.713	488.880	530.229	567.965
9	65.616	127.463	185.704	240.495	291.986	340.322	385.640	428.075	467.755	504.803
2,0	53.991	105.525	154.687	201.557	246.215	288.736	329.195	367.664	404.212	438.907
1	43.984	86.396	127.278	166.673	204.619	241.157	276.323	310.156	342.693	373.967
2	35.475	69.963	103.485	136.062	167.712	198.457	228.314	257.302	285.440	312.747
3	28.327	56.046	83.168	109.701	135.656	161.042	185.865	210.142	233.874	257.073
4	22.395	44.422	66.087	87.393	108.346	128.949	149.207	169.125	188.706	207.954
5	17.528	34.839	51.934	68.815	85.485	101.945	118.197	134.243	150.086	165.727
6	13.583	27.039	40.370	53.576	66.658	79.616	95.453	105.168	117.762	130.237
7	10.421	20.770	31.046	41.252	51.386	61.449	71.442	81.365	91.218	101.002
8	7.916	15.791	23.625	31.420	39.175	46.889	54.565	62.200	69.796	77.353
9	5.953	11.883	17.791	23.677	29.541	35.383	41.203	47.002	52.778	58.532
3,0	4.432	8.852	13.260	17.656	22.040	26.412	30.772	35.121	39.458	43.783
1	3.267	6.527	9.781	13.029	16.271	19.506	22.735	25.958	29.174	32.384
2	2.384	4.765	7.142	9.517	11.888	14.255	16.620	18.981	21.339	23.694
3	1.723	3.444	5.163	6.880	8.596	10.311	12.023	13.734	15.444	17.151
4	1.232	2.464	3.694	4.924	6.153	7.381	8.608	9.835	11.060	12.285
5	873	1.745	2.617	3.488	4.360	5.230	6.101	6.970	7.840	8.709
6	612	1.224	1.835	2.446	3.058	3.668	4.279	4.890	5.500	6.110
7	425	850	1.274	1.699	2.123	2.547	2.972	3.396	3.820	4.243
8	292	584	876	1.167	1.459	1.751	2.042	2.334	2.626	2.917
9	199	397	596	795	993	1.192	1.390	1.589	1.788	1.986
4,0	134	268	401	535	669	803	936	1.070	1.204	1.338

Segue: TAV. I. — *Probabilità del valore massimo di* n *variabili casuali indipendenti seguenti la legge normale ridotta*

(n = 1, 2, 3, . . ., 10). (Seconda parte: Ascisse negative).

ξ	$\varphi_1(\xi)$	$\varphi_2(\xi)$	$\varphi_3(\xi)$	$\varphi_4(\xi)$	$\varphi_5(\xi)$	$\varphi_6(\xi)$	$\varphi_7(\xi)$	$\varphi_8(\xi)$	$\varphi_9(\xi)$	$\varphi_{10}(\xi)$
— 0,0	398.942	398.942	299.207	199.471	124.669	74.801	43.634	24.934	14.025	7.792
1	396.953	365.333	252.174	154.725	89.000	49.146	26.385	13.876	7.184	3.673
2	391.043	329.055	207.670	116.500	61.270	30.935	15.185	7.302	3.456	1.616
3	381.388	291.448	167.038	85.098	40.644	18.635	8.307	3.628	1.559	662
4	368.270	253.796	131.179	60.268	25.959	10.734	4.315	1.699	659	252
5	352.065	217.251	100.545	41.363	15.952	5.906	2.126	750	260	89
6	333.225	182.776	75.190	27.495	9.426	3.102	993	311	96	29
7	312.254	151.108	54.844	17.694	5.352	1.554	439	121	33	9
8	289.692	122.745	39.006	11.018	2.918	742	183	44	11	3
9	266.085	97.951	27.043	6.637	1.527	337	72	15	3	1
— 1,0	241.971	76.780	18.272	3.865	767	146	27	5	1	
1	217.852	59.110	12.029	2.176	369	60	10	1		
2	194.186	44.690	7.714	1.183	170	24	3			
3	171.369	33.177	4.817	622	75	9	1			
4	149.728	24.183	2.929	315	32	3				
5	129.518	17.305	1.734	154	13	1				
6	110.921	12.157	999	73	5					
7	94.049	8.383	560	33	2					
8	78.950	5.673	306	15	1					
9	65.616	3.768	162	6						
— 2,0	53.991	2.457	84	3						
1	43.984	1.571	42	1						
2	35.475	986	21							
3	28.327	608	10							
4	22.395	367	5							
5	17.528	218	2							
6	13.583	127								
7	10.421	72								
8	7.916	40								
9	5.953	22								
— 3,0	4.432	12								
1	3.267	6								
2	2.384	3								
3	1.723	2								
4	1.232	1								
5	873									

TAV. II. — *Valore mediano della massima tra* n *variabili casuali indipendenti seguenti la legge normale ridotta.*

(Prima parte: n da 1 a 1.000).

n	ξ_n	n	ξ_n	n	ξ_n	n	ξ_n
1	0,0000	26	1,9381	60	2,2739	310	2,8431
2	5450	27	9540	70	3319	320	8532
3	8193	28	9695	80	3812	330	8630
4	9981	29	9842	90	4242	340	8723
5	1,1290	30	9983	100	4621	350	8816
6	2313	31	2,0120	110	4960	360	8903
7	3149	32	0251	120	5266	370	8990
8	3852	33	0378	130	5544	380	9073
9	4458	34	0500	140	5801	390	9154
10	4988	35	0619	150	6038	400	9235
11	5459	36	0734	160	6254	410	9311
12	5882	37	0845	170	6463	420	9383
13	6265	38	0953	180	6656	430	9454
14	6615	39	1057	190	6836	440	9529
15	6937	40	1159	200	7007	450	9598
16	7235	41	1257	210	7169	460	9665
17	7512	42	1353	220	7322	470	9731
18	7771	43	1447	230	7468	480	9796
19	8014	44	1538	240	7607	490	9859
20	8242	45	1626	250	7741	500	9922
21	8457	46	1713	260	7867	600	3,0472
22	8661	47	1797	270	7989	700	0933
23	8854	48	1880	280	8107	800	1328
24	9038	49	1960	290	8219	900	1670
25	9213	50	2039	300	8328	1000	1983

(Seconda parte: n da 1.000 a 900.000.000).

n = cifra in testa alla colonna × × potenza di 10 in testa alla riga	1	1,2	1,5	2	2,5	3	4	5	6	7	8	9
1.000	3,19	3,24	3,31	3,39	3,45	3,50	3,57	3,63	3,68	3,72	3,75	3,78
10.000	3,81	3,85	3,90	3,97	4,03	4,07	4,14	4,19	4,23	4,26	4,29	4,32
100.000	4,34	4,38	4,43	4,49	4,54	4,58	4,64	4,68	4,72	4,75	4,78	4,80
1.000.000	4,82	4,86	4,90	4,96	5,00	5,04	5,09	5,13	5,17	5,20	5,22	5,24
10.000.000	5,26	5,30	5,34	5,39	5,43	5,46	5,51	5,55	5,58	5,61	5,63	5,65
100.000.000	5,67	5,70	5,74	5,79	5,83	5,85	5,90	5,94	5,97	5,99	6,01	6,03

di probabilità della variabile casuale $\xi_n | M_n - \xi_n |$ tende, per $n \longrightarrow \infty$, alla legge per cui

$$\Phi(\xi) = \left(\frac{1}{2}\right)^{e^{-\xi}}, \tag{7}$$

ossia

$$\varphi(\xi) = \log 2 \,.\, e^{-(\xi + \log 2 \,.\, e^{-\xi})}. \tag{8}$$

Per $u = \pm 1$ risulta $\left(\frac{1}{2}\right)^{e} = 0{,}152$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/e} = 0{,}775$, ed è quindi $0{,}775 - 0{,}152 = 0{,}513$, e cioè un po' più di mezzo, il limite della probabilità che sia $|M_n - \xi_n| < \frac{1}{\xi_n}$. Il valore mediano dello scarto $|M_n - \xi_n$ è quindi, per n grande, poco meno di $\frac{1}{\xi_n}$, e potremo dire, in breve, che tale scarto è dell'ordine di grandezza di $\frac{1}{\xi_n}$.

Nell'esempio riportato, dei numeri di minima e massima frequenza nel gioco del lotto, lo scarto è minore di $\frac{1}{\xi_n}$ in 11 casi su 18. I sette casi in cui lo scarto è maggiore sono: Torino mass. (numero **2**); Bari mass. (**12**); Milano min. (**74**); Roma min. (**63**); Bari min. (**79**); Tutte mass. (**12**); Napoli min. (**70**).

A. N. SČUKAREV

Ueber die Mechanik der Massenprozesse (Kollektivgegenstandlehre)

Im Jahre 1916 veröffentlichte ich in dem " Allgemeinen Statistischen Archiv " einen Artikel unter dem Titel " Ueber die Gleichungen der Kinetik der sozialen Vorgänge " in dem ich den Versuch getan habe die mathematische Gleichungen für einige ökonomische und moralstatistische Erscheinungen zu geben.

Da ich damals bei den Lesern dieses Archivs weder die tiefe Kenntnis der mathematischen Chemie und Physik, noch weniger der Thermodynamik voraussetzen konnte, so begnügte ich mich bei der Aufstellung der erwähnten Gleichungen nur mit der Methode der Analogien.

Aber der Weg auf dem ich selbst zu diesen Gleichungen gekommen war, war ein ganz anderer.

Bei der Zahlenprüfung der erwähnten Gleichungen, musste ich damals, bei der Abwesenheit in der allgemeinen Statistik der Beobachtungen der Sozialvorgänge in dem zeitlichen Verlauf, mich mit ein wenig künstlichen Verfahren begnügen.

Jetzt ist es gelungen meinem Mitarbeiter Herrn Dr. G. A. Prokopovič genügendes Material der unmittelbaren zeitlichen Beobachtungen zu sammeln, und bei der Veröffentlichung seiner Angaben scheint es mir zweckmässig auch meine frühere Grundlage der allgemeine Sozialmechanik zu niederlegen. Es ist desto mehr rechtzeitig, weil andere Forscher, z. B. der berühmte italienischer Mathematiker Volterra *) von anderer Seite fast zu denselben Gleichungen gelangen.

*) « Sui tentativi di applicazione delle matematiche alle Scienze biologiche e sociali ». Bologna, Zanichelli, 1920.

***

Es existirt eine Abteilung der Physik, die von anderen Kapiteln dieser Wissenschaft etwas abgesondert steht. Sie trägt eine alte, ihrem jetzigen Inhalte nicht gut entsprechende Benennung : Thermodynamik, was die Lehre der Ueberführung der Wärme in die Kraft oder in Arbeit bedeutet. Aber das ist nur historisch ; sie umfasst jetzt die ganze Physik und stellt die allgemeine Lehre dar, die von den anderen Kapiteln der Physik sich damit unterscheidet, dass sie, von zwei ganz allgemeinen Experimentalgesetzen (ander Postulaten) ausgehend, bei der Entwicklung ihres Inhalts keine Forderung über die Kenntnis der nähere Natur der betrachteten Erscheinung stellt.

Nach den schönen Arbeiten von W. Gibbs, Helmholtz, Plank u. and. findet dieser Zweig besondere Anwendung bei dem Bearbeiten der physikalischen und chemischen Erscheinungen, die als Massenerscheinungen von anderen unterscheidet werden können ; z. B. die Erscheinungen des chemischen Gleichgewichts.

Dieses Gleichgewicht ist nicht im mechanischen Sinne gemeint : es ist ein stationärer Zustand, welcher sich auf die statistische Gleichheit der zwei entgegenfliessenden chemischen Umwandlungen beruht, die selbst zwei entgegengesetzte Massenprozesse darstellen. Von dem Gleichgewicht kann man, wenn auch nicht direkt, zu den Gleichungen der Kinetik der chemischen Massenprozesse übergehen.

In der Physik umfassen diese Gleichungen die Erscheinungen des radioaktiven Atomzerfalls, welche ebenso die Erscheinungen darstellen, in denen mindesten 100 000 Atome in der Sekunde Teil nennen. Man kann daraus leicht zu der Idee kommen, dass eine so allgemeine, von jeglichen Hypothesen freie Betrachtungsmethode auch auf einige sozialen und ökonomischen Prozesse, die ebenso als typische Massenprozesse anerkannt werden müssen, übertragen werden kann.

In der physikalisch-chemischen Thermodynamik geht man gewöhnlich aus der Gleichung der Aenderung der sogenannten inneren Energie des Systems aus, die man als Summe der einzelnen Gliedern darstellt, die selbst die Energien oder Arbeitäquivalente *) der einzelnen Zustände des Systems darstellen

$$d\,U = T\,d\,S - p\,d\,v + \mu_1\,d\,m_1 + \mu_2\,d\,m_2 \ldots \qquad (1)$$

*) Hier muss man die Energie besser rein nominalistisch betrachten, als allgemeinen Messbegriff, der alle Erscheinungen der Natur, abgesehen von ihrem Mechanismus, rein formal darstellen kann.

wo dU die Aenderung der inneren Energie, TdS das sogenannte Wärmeglied, $p\,dv$ — äussere Arbeit und die Glieder $\mu_1 d m_1\ \mu_2 d m_2 \ldots$ die Energien der Einführung in das System der einzelnen chemischen Komponenten darstellen. Jedes einzelne Glied besteht, wie es leicht zu sehen ist, aus zwei Faktoren, von welchen der erste : T, p, μ_1, μ_2 gewöhnlich wie Potential bezeichnet ist, und die parzielle Aenderung der inneren Energie nach bestimmter Energieart, Zustand, oder chemischen Komponente darstellt :

$$\mu_1 = \frac{\delta U}{\delta m_1}\ ;\ \mu_2 = \frac{\delta U}{\delta m_2} \ldots$$

Wie es zuerst W. Gibbs, dann Helmholtz gezeigt haben, jede Entstehung jedes neuen " Zustandes ", oder Eigenschaft des Systems, z. B. die Vergrösserung der Oberfläche, als Folge der Zerkleinerung (chemische Zustand der Dispersion), oder solche Absonderung der einzelnen Bestandteile des Systems, dass es als Ganzes den elektrischen Strom liefern kann (die Bildung des galvanischen Elementes) führt zur Verwickelung der Gleichung (1) mit den betreffenden Gliedern :

$$dU = TdS - p\,dv + \mu_1 d m_1 + \mu_2 d m_2 \ldots + \sigma d s \ldots + I d e \quad (2)$$

wo σds die Energie der Oberfläche (Gibbs) und Ide die elektrische Energie des galvanischen Elementes (Helmholtz) sind.

Man kann diesen Gedankengang weiter fortführen. Setzen wir an, dass das betrachtete System verwickelt sich so, dass es mit dem Bewustsein begabte biologische Komplexe (Menschen, Tiere) bildet, und schliesslich diese biologische " Atome " ein noch höheres Komplex : Gesellschaft verursachen. Entsprechend diesen zwei neuen " Eigenschaften " muss man in die allgemeine thermodynamische Gleichung (1 und 2) eine Reihe von neuen Gliedern einführen. Wir bekommen :

$$dU = TdS - p\,dv + \mu_1 d m_1 + \mu_2 d m_2 \ldots Z_1 d z_1 + Z_2 d Z_2 \ldots + \\ + G_1 d g_1 + G_2 d G_2$$

wo Glieder mit Z die " Bewustseinernergien " und mit G die Energien der Gesellschaftsbildung darstellen.

$$Z = \frac{\delta U}{\delta z} \qquad G = \frac{\delta U}{\delta g}$$

Ich führe nicht weiter. Man kann leicht in einem beliebigen Lehrbuch der Thermodynamik die Ausdrucke für $\mu_1\ \mu_2 \ldots$ finden.

$$\mu_1 = K\,l\,g\,m \text{ oder } = K^1\,l\,g\,C \text{ wo } C = \frac{m}{v}$$

Nach Analogie kann man leicht die Ausdrücke für Z und G zusammenstellen

$$Z = K\,l\,g\,Z \text{ oder } Z = K\,l\,g\,\frac{z}{z_0}\ ;\ G = K\,l\,g\,\frac{G}{G_0}$$

Was die Rechtfertigung der Funktion Z betrifft, so kann ich auf meinen alten Artikel in " Annalen der Naturphilosophie *) zurückweisen. Hier will ich nur die Funktion G näher betrachten. Sie stellt die Energie des Einführens des einzelnen " Bestandteiles " in die Gesellschaft. Diese " Bestandteile " können nicht nur die Leute, welche diese Gesellschaft bilden, sondern auch verschiedene ökonomische " Güte " (einfach Waren) sein.

Von der Thermodynamik kann man leicht zur Kinetik des Vertriebes dieser " Güte " (Waren) in eine gewisse begrenzte Gesellschaft übergehen. Die kinetische Gleichung dieses Vertriebes wird :

$$\frac{d\,x}{d\,x} = K\ (a - x)\ . \qquad (3)$$

So war die Gleichung (3) meines obenerwähnten Artikels in " Allgemeinen Statistischen Archiv " entstanden. Sie war in Wirklichkeit durch den Verkaufsprozess im Jahre 1903 rechtfertigt (Tabelle VI erw. Artikels).

Jetzt will ich diese Gleichung aufs neue mit den Angaben von Dr. G. A. Prokopovič prüfen.

Dr. G. A. Prokopovič verfolgte den Verkaufsprozess einiger neuen Bücher und Zeitungen erstmals hier in Charkow und dann in Leningrad.

In Charkow verfolgte er die Schnelligkeit des Vertriebes folgender Bücher :

1. Prof. Latyschow, Die Malaria, Buchhandlung " Nautschnaja Mysl ".

*) 1906. S. 139.

2. Warschawskij, Der Arbeitsvertrag, Buch. d. Narkomjust.

3. Prof. Gordon, System des Handelrechts, ebenda selbst.

4. Bernikow und Swetlow, Politgramota Buchhandl. des Tscherwonny Schliach ".

Die erhaltenen Daten errechnete G. A. Prokopovič nach der Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = K\ (a - x) \tag{4}$$

wo a die Sättigungsgrenze des Marktes bedeutet, x die Menge der in der gegebenen Zeit verkäuften Ware.

Nach der Integration ist es

$$\frac{lg\, a - lg\,(a - x)}{t} = K \tag{5}$$

Nach drei oder mehr Werten von x berechnete Prokopovič die Grössen a und K, nach der Formel (5) die Werte von x, welche einzelnen t entsprechen, und verglich sie mit den wirklich beobachteten Daten.

Die Resultate sind in der Tabelle 1 zusammengestellt.

Tabelle 1.

Die Malaria			Der Arbeitsvertrag			System der Handelsrechts			Polytgramota		
$a = 11{,}35$	$k = 0{,}0577$		$a = 20{,}25$	$k = 0{,}0231$		$a = 220{,}95$	$k = 0{,}0033$		$a = 650$	$k = 0{,}00109$	
Einh. der Zeit	Verkauft beob.	in Zeiteinh. berech.	Einh. der Zeit	Verkauft beob.	berech.	Einh. der Zeit	Verkauft beob.	berech.	Einh. der Zeit	Verkauft beob.	berech.
2 Woche	5	5,7	1 Monat	10	10,12	3 Monate	53	58,2		163	182
	3	3		5	5,06		47	42,9		131	131
	2	1,4		3	2,53		31	31,6		131	94
	1	0,7		1	1,2		23	23,3	1 Woche	84	68
	0	0,4		1	0,63		13	17,1		40	49
				1	0,3		15	12,6		18	36
							13	9,3		18	25

In der Tabelle 1 sind bei der Berechnung der K Werte verschiedene Einheiten der Zeit angenommen Berechnet man sie alle auf eine gemeinsame Einheit (die Woche), so bekommt man die Tabelle 2.

TABELLE 2.

	Einh. der Zeit	K.
Die Malaria	1 Woche	0,029
Der Arbeitsvertrag	» »	0,006
Handelsrecht	» »	0,0011
Politgramota	» »	0,0010

Aus der Tabelle 2 kann man leicht sehen, dass die Konstante der Geschwindigkeit des Vertriebs in der Gesellschaft, die das Bedürfnis oder das Vertrauen der Bevölkerung zu diesen vier Auflagen darstellt, für diese vier Bücher ganz verschieden ist. Obgleich das Buch über die Malaria von Prof. LATYSCHEW in einer sehr begrenzten Menge von Exemplaren verlangt wird, so bestand doch kein Zweifel am Wert seines Inhalts und die Welt der Aerzte kaufte es mit der grössten Geschwindigkeit. Die anderen Bücher sind nicht so interessant, oder es ist das Bedürfnis nach ihnen nicht so gross und jedenfalls werden sie nicht so rasch vertrieben.

Tabelle 2 zeigt am deutlichsten, dass die Menge der in gewisser Zeit vertriebenen Ware keinwegs als Mass des Interesses oder der Nützlichkeit dieser Ware angenommen Werten kann.

Die folgende Prüfung der Gleichungen (4) und (5) wird in Leningrad von demselben PROKOPOVIČ ausgeführt. An der Ecke des Prospekts von 25 Oktober (der frühere Newski) und der Grossen Morskaja steht ein Zeitungskiosk. Nahe bei diesem Kiosk hängt eine Wanduhr. Dr. PROKOPOVIČ machte mit dem Verkäufer in diesem Kiosk ab, dass er eine Reihe von Tagen von Stunde zu Stunde die Menge der verkauften Exemplare des täglich erscheinenden " Roten Abendblattes " notierte. Dieses Abendblatt erscheint annähernd um zwei Uhr nachmittag. Die Tabelle 3 stellt die Verarbeitung des gesammelten Materials dar. Unter jedem Tage gibt die erste Kolonne die Stunden, die zweite die Menge der Exemplare des Abendblattes, welche in diesem Stunden-intervall verkauft waren. a ist die Sättigungsgrenze, man bekommt sie durch

Tabelle 3.

Stunde	26 Mai			27 Mai			28 Mai			29 Mai			31 Mai		
	Verkf.	$a - x$	K	Verkf.	$a - x$	K	Verkf.	$a - x$	K	Verkf.	$a - x$	K	Verkf.	$a - x$	K
2–3	43	56	0,24	29	49	0,20	36	64	0,19	39	59	0,22	37	74	0,18
3–4	22	34	0,23	14	35	0,17	21	43	0,18	25	34	0,23	34	40	0,22
4–5	9	25	0,20	10	25	0,17	9	34	0,16	16	18	0,24	12	28	0,20
5–6	4	21	0,17	5	20	0,15	8	26	0,15	3	15	0,20	7	21	0,19
6–7	5	16	0,16	7	13	0,16	12	14	0,17	7	8	0,22	11	10	0,21
7–8	7	9	0,17	4	9	0,16	7	7	0,19	5	3	0,25	7	3	0,26
8–9	6	3	0,21	5	5	0,17	4	3	0,21	3			3		
9–10	3	$a = 99$	*Mt.* 0,20	4	$a = 78$	0,17	3	$a = 100$	0,18		$a = 98$	0,22		$a = 111$	0,21

Stunde	1 Juni			2 Juni			3 Juni			4 Juni			5 Juni		
	Verkf.	$a - x$	K	Verkf.	$a - x$	K	Verkf.	$a - x$	K	Verkf.	$a - x$	K	Verkf.	$a - x$	K
2–3	25	55	0,16	30	46	0,22	28	51	0,19	23	43	0,19	24	41	0,20
3–4	15	40	0,15	6	40	0,19	21	30	0,21	16	27	0,19	14	27	0,19
4–5	9	31	0,14	7	33	0,12	7	23	0,18	4	23	0,15	7	20	0,17
5–6	7	24	0,13	12	21	0,14	6	17	0,17	6	17	0,15	5	15	0,16
6–7	12	12	0,17	14	7	0,20	11	6	0,22	10	7	0,20	8	7	0,19
7–8	8	4	0,20	4	3	0,23	6			4	3	0,22	3	4	0,20
8–9	4	$a = 80$	*Mt.* 0,16	3	$a = 76$	0,18		$a = 79$	0,19	3	$a = 66$	0,18	4	$a = 65$	0,18

Tabelle 4.

« Ekran » 12-19 Juni 1926.

Tage	N° 2			N° 3			N° 5			N° 6			N° 8			N° 10		
	Verkf.	$a - x$	K	Verkf.	$a - x$	K	Verkf.	$a - x$	K	Verkf.	$a - x$	K	Verkf.	$a - x$	K	Verkf.	$a - x$	K
1	10	10	0,30	15	24	0,21	31	30	0,31	25	25	0,31	28	20	0,37	10	20	0,17
2	5	5	0,30	10	14	0,22	11	19	0,30	10	15	0,26	11	9	0,34	8	12	0,20
3	5			5	9	0,21	9	10	0,26	8	7	0,28	2	7	0,28	6	6	0,23
4				3	6	0,20	3	7	0,25	7			3	4	0,27	3	3	0,25
5				3	3	0,18	4	3	0,20				1	3	0,24	2	1	0,29
6				3			3						2	1	0,26	1		
7													1					
		$a = 20$	*Mt.* 0,30		$a = 39$	0,20		$a = 61$	0,26		$a = 50$	0,28		$a = 48$	0,29		$a = 30$	0,23

Tage	N° 18			N° 19			N° 20			N° 22			Summarisch			Summarisch		
	Verkf.	$a - x$	K	Verkf.	$a - x$	K	Verkf.	$a - x$	K	Verkf.	$a - x$	K	Verkf.	$a - x$	K	Verkf.	$a - x$	K
1	12	9	0,37	13	12	0,32	30	26	0,33	15	36	0,15	309	409	0,24	id.	424	0,238
2	4	5	0,31	3	9	0,22	21	5	0,52	12	24	0,16	173	236	0,24		251	0,232
3	4	1	0,44	4	5	0,23	3	2	0,46	10	14	0,18	104	132	0,24		147	0,232
4	1			3	2	0,27	1			7	7	0,21	64	68	0,25		83	2,238
5				2						4	3	0,24	32	36	0,20		51	0,231
6										2	1		23	13	0,29		28	0,236
		$a = 21$	*Mt.* 0,37		$a = 25$	0,26		$a = 56$	0,44		$a = 51$	0,19		$a = 718$	0,24	a ber.	$= 733$	

TABELLE 5.

« Ogoniok » 12-19 Juni 1926.

Tage	N° 3			N° 7			N° 20			Summarisch			Summarisch		
	Verkf.	$a - x$	K	Verkf.	$a - x$	K	Verkf.	$a - x$	K	Verkf.	$a - x$	K	Verkf.	$a - x$	K
1	12	11	0,32	18	22	0,26	5	11	0,16	129	225	0,20	id.	247	0,180
2	5	6	0,29	10	12	0,26	4	7	0,18	97	128	0,22		150	0,199
3	3	3	0,29	4	8	0,23	3	4	0,20	47	81	0,21		103	0,187
4	0			3	5	0,22	2	2	0,22	32	49	0,21		71	0,180
5	2	1		5			2			30	19	0,25		41	0,192
6	1									12	7	0,28		29	0,185
7		$a = 23$	*Mt.* 0,29		$a = 40$	0,24		$a = 16$	0,19		$a = 354$		*a* ber.	= 376	

TABELLE 6.

« Rote Niwa » 12-19 Juni 1926.

Tage	Summarisch		
	Verkauft	$a - x$	K
1	23	11	0,49
2	7	4	0,46
3	2	2	0,41
4	0		
5	2		
6			
		$a = 34$	*Mt.* 0,45

das einfache Summieren der täglich verkauften Exemplare, K die Konstante der Verkaufsgeschwindigkeit, berechnt nach Formel (5).

Die Betrachtung der Tabelle 3 zeigt, dass die Konstanz der Grösse K, obgleich sie im Laufe des Tages ein wenig schwankt *) dennach genügend deutlich erkannt werden kann. Sie hält sich ebenso stet, wie die Konstante während der ganzen Beobachtungsperiode von 10 Tagen. Leider sind die Wetterangaben nur bei den ersten drei Tagen der Beobachtungszeit bestimmt; am ersten Tage war es hell und warm, am zweiten kalt und feucht, am dritten nochmals gutes Wetter. Das Wetter wirkt, wie es scheint, nur auf die Sättigungsgrenze der Handlung und bleibt fast ohne Einfluss auf die Konstante K. Die Tabelle 3 zeigt vollkommen deutlich, dass die Konstante der Geschwindigkeit des Verkaufsprozesses von der Sättigung a unabhängig ist. Die Grösse a für den 31 Mai ist 111. Sie ist zweimal grösser als für den 5 June - 65, aber die Konstante K variiert nur von 0,21 bis 0,18.

Durch diesen Erfolg angefeuert, wendete sich Prokopovič an die damals in Leningrad bestandene Zentralverwaltung der Strassenkioske, und diese gestattete ihm in allen 32 Kiosken analoge Beobachtungen anzustellen. Da es unmöglich war, alle Händler der Kioske mit Uhren zu versehen, so wählte er diesmal als Beobachtungsmaterial 3 wöchentliche Auflagen: " Ekran " " Ogonjok " und " Rote Niwa ".

Die Resultate sind in den Tabellen 4, 5 und 6 gesammelt. Ich bringe hier nicht die Ausrechnungen der Koeffizienten K für alle einzelne Kioske, sonderen begnüge mich mit einigen willkürlich gewählten. Am Ende jeder Tabelle ist der Gesamtverkauf der betreffenden Auflage in allen Kiosken summiert und die Konstante K zweimal ausgerechnet, indem einmal die ganze Summe der verkauften Exemplare als a genommen wurde, und das andere Mal der Sättigungsgrad a aus den Daten selbst nach dem System der 3 Angaben berechnet war.

Die Durchsicht dieser Tabellen zeigt:

1) Dass die Konstanten der Verkaufsgeschwindigkeit sich überhaupt nach dem einen oder anderen Stadtbezirk ändern. Sie hängen gleichfalls nicht von a ab.

---

*) Das hängt wahrscheinlich von der regelmässigen Aenderung des Lebensregimes der Bewohner von Leningrad ab, da das Minimum der Konstante für alle Tage annähernd Konstant auf 4-5 Uhr fällt.

2) Die Konstante der Summarischen Beobachtungen, besonders wenn man für a die aus den Daten selbst berechnete Grösse annimmt, zeichnet sich durch grosse Beständigkeit aus. Die Chemiker und Physiker wären sehr glücklich, wenn sie bei ihren kinetischen Messungen, für welche sie um die Regulierung der äusseren Bedingungen besonders besorgt sind, ebenso gute Konstanten bekommen könnten.

Tabelle 7 stellt die Wiederholung dieser Messungen nach einem Jahre (1927).

TABELLE 7.

12-18 Februar 1927.

Tage	« Ekran » Summarisch			« Ogonjok » Summarisch			« Rote Niwa » Summarisch		
	Verkf. gesamt	$a - x$	K	Verkf. gesamt	$a - x$	K	Verkf. gesamt	$a - x$	K
1	90	157	0,20	294	387	0,24	33	48	0,23
2	160	87	0,23	509	172	0,30	59	22	0,28
3	195	52	0,22	577	104	0,27	68	13	0,26
4	220	27	0,24	618	63	0,26	72	9	0,24
5	234	13	0,25	654	27	0,26	78	3	0,28
6	238	9	0,24	664	17	0,27	78	3	
7	242			668	13	0,24	79		
		$a = 263$	$Mt.0,23$		$a = 681$	0,26		$a = 81$	0,26

Die Betrachtung der Tabelle 7 zeigt, dass die Geschwindigkeitskonstante für den " Ekran " fast unveränderlich blieb. Für das Journal " Ogonjok " hat sich diese Konstante bedeutend erhöht, und für die " Rote Niwa " ebenso bedeutend verringert.

Parallel zu diesen Beobachtungen unternahm G. A. PROKOPOVIČ, ebenso nach der liebenswürdigen Genehmigung der betreffenden Zentralverwaltung, die Beobachtungen, über die Sättigung Leningrads mit Brennholz. Das Holz liefert man in Leningrad gewöhnlich auf dem Wasserwege, und die Bewohner versehen sich damit gewöhnlich in den Sommermonaten. Leider konnte G. A. PROKOPOVIČ diesen Prozess nicht vom Anfang an verfolgen; er begann seine Beobach-

tungen nur im Oktober, wo das Holz, gleichzeitig mit dem Einkauf, auch schon zur Verwendung gelangt. Darum muss man die Gleichung der Kinetik des Einkaufs dieser Ware ein wenig anders aufstellen. Da der Prozess der Versorgung mit Holz mit dem Prozesse des Verbrauchs parallel geht, so muss die Geschwindigkeit des Einkaufs etwas gröser sein. Sie ist

$$\frac{dx}{dt} = K(a - x) + f(x) .$$

Hier ist $f(x)$ unbekannt, aber, wie es die analogen Fälle der chemischen Kinetik (die so genannten reversiblen Reaktionen) zeigen, ist es gleichgültig, welche Voraussetzung wir über die Natur dieser Funktion zu tun wünschen, wenn x in dieser Funktion nicht höher als in der ersten Potenz eintrift. Wir bekommen dieselbe Gleichung (4) mit dem Unterschied, dass hier a nicht die Sättigungskonstante bedeutet, sondern überhaupt eine neue Konstante ist. Wir müssen sie nur aus den Beobachtungen berechnen, Z. B. wenn wir $f(x)$ einfach gleich K^1 zu setzen wünschen, so bekommen wir

$$\frac{dx}{dt} = K(a - x) + K^1 = Ka + K^1 - Kx = K\left[\frac{Ka + K^1}{K} - x\right] =$$

$$= K(a^1 - x) \; ; \text{ wo } a^1 = \frac{Ka + K^1}{K} .$$

Tabelle 8 enthält die Daten und die Berechnungen dieses Verkaufsprozesses.

Tabelle 8.

Datum	Zeitinterv.	Verkauft in Zeitinterv.	id. gesamt.	a^1 berech.	$a^1 - x$	K
12 – X – 26 . . .		67,16	67,16 c. s.		202	
24 – X » . . .	12 Tg.	42,97	110,13 c. s.		159	0,104
9 – XI » . . .	16 »	33,49	143,6	286,4	126	0,102
23 – XI » . . .	14 »	28,0	171,6	313.1	98	0,104
7 – XII » . . .	14 »	19,2	190,8	259,3	78	0,103
21 – XII » . . .	14 »	10,6	201,4	216,5	68	0,094
				Mt. 269,1		

Alle diese Beobachtungen von G. A. Prokopovič zeigen nochmals die volle Anwendbarkeit der Gleichungen der chemischen Kinetik auf die sozialen Vorgänge.

Man kann daraus schliessen, dass die Thermodynamik, in der hier eingeführten Erweiterung, eine wirkliche Basis für die Mechanik aller Massenerscheinungen darstellt. Sie ist wirklihe "Kollektivgegenstandslehre", von der Fechner träumte.

Die hier dargestellte Erweiterung der Thermodynamik und Massenkinetik von der Physik auf die Oekonomie und die Sozialerscheinungen kann rückwirkend auch der Physik selbst einigen Nutzen bringen. In der Tat sind, wie die Tabelle 7 zeigt, die Konstanten der Verkaufsgeschwindigkeit in einigen Fällen von äusseren Bedingungen abhängig. Sie verändern sich von Jahr zu Jahr. Analoge Beziehungen zeigen auch die Konstanten der chemischen Geschwindigkeiten. Die letzteren änderen sich bedeutend mit der Temperatur. Aber was hat man unter "Temperatur" in der verallgemeinerten Thermodynamik zu verstehen? Diese Frage ist schon von Max Plank in seiner berühmten Theorie der Wärmestrahlung beantwortet worden. Thermodynamisch ist die Temperatur nichts anders, als die partielle Aenderung der inneren Energie mit der Entropie

$$\frac{1}{t} = \frac{\delta U}{\delta S}$$

Aber was kann man unter der Entropie S in den Massenerscheinungen verstehen? Diese Frage ist ebenso schon längst von L. Boltzmann entschieden. Die Entropie ist für jedes System dem Logarithmus der Wahrscheinlichkeit des Zustandes W proportionell

$$S = K \, l \, g \, W$$

Die Wahrscheinlichkeit des Zustandes ist aber die Beziehung der Zahl der Komplexionen, mit denen eine gewisse Verteilung realisiert werden kann, zur Gesamtzahl aller möglichen Fälle der Verteilung.

Man kann daraus postulieren, dass jede Verteilung ihre *eigene Entropie* und folglich ihre eigenen Temperatur haben kann *).

Daraus folgt, dass die Entropie S auch die Temperatur T des Systems thermodynamisch nicht einmalig bestimmt ist; sie ist nicht

*) Mann kann diese Idee schon in Planckes Wärmestrahlung, s. 101 finden.

die einzige, sie ist wie die Energie zerlegbar in eine Reihe von einzelnen Entropien. Folglich muss man die grundlegende thermodynamische Gleichung der Systems folgendermassen schreiben

$$dU = TdS + T^1 dS^1 \ldots + p\,dv + \mu_1 dm_1 \ldots$$

Müssen aber die einzelnen Entropien (und folglich auch die entsprechenden Temperaturen) von einander abhängig sein ? Ich glaube, dass es nicht notwendig ist. Man könnte sich ein System denken, in dem die Entropie der gewissen Verteilungen schon ihren maximalen Wert erreicht ist, also die Temperatur vollkommen konstante ist, und zu gleicher Zeit wäre es denkbar, dass die Entropie für andere Verteilungsarten sich änderen, sogar schwanken kann.

GIORGIO CAGNO

Gli studenti dell'Università di Roma attraverso il tempo dal XVI Secolo ai giorni nostri

1. — Seguire attravèrso il tempo la vita e lo sviluppo di un Istituto culturale da cui sorse e si diffuse nel mondo chiara luce di progresso e di sapere è opera degna del massimo interesse ed al cui raggiungimento ogni sforzo merita di esser tentato.

E questo, appunto, avrebbe dovuto essere lo scopo del presente studio sull'Università di Roma, che si aggiunge a quelli già noti su Padova (1) e Ferrara (2) e mediante il quale ci eravamo proposti di rilevare lo sviluppo della popolazione studentesca dalle origini ai giorni nostri. Ma numerose difficoltà, abituali del resto a simili ricerche remote, si sono frapposte al regolare svolgimento della rilevazione, a cui non fu possibile dare l'estensione voluta.

Il disordine degli archivi, lo smarrimento dei registri più vecchi, l'inintelligibilità di altri fece sì che notizie numeriche sufficientemente continue e complete si potessero trovare solo a partire dal 1548, al quale anno risale il più antico materiale esistente : dopo di tale epoca i dati che potemmo raccogliere, sebbene talvolta frammentari e incompleti, seguono abbastanza fedelmente lo sviluppo naturale del nostro Archiginnasio. Per necessità tecniche di trattazione e per semplificarne l'esame, abbiamo ritenuto opportuno ripartire tali dati in tre parti, corrispondenti a tre momenti storici dell'Università : l'una — la più antica — va dal 1548 al 1729 e considera i soli laureati in

(1) M. Saibante, C. Vivarini, G. Voghera : *Gli studenti dell'Università di Padova dalla fine del* 500 *ai giorni nostri*. Studio statistico. « Metron », vol. IV, n. 1.

(2) Carlo Pinghini : *La popolazione studentesca dell'Università di Ferrara dalle origini ai nostri tempi*. Studio statistico. « Metron », vol. VII, n. 1.

« Utroque Jure » ; l'altra — che potrebbe esser chiamata del « Risorgimento », perchè comprende gli anni delle insurrezioni italiche culminanti con la presa di Roma — va dal 1813 al 1870, e comprende, invece, i soli iscritti ai varî corsi delle diverse facoltà ; e l'ultima — la Moderna — che dal 1870 giunge fino a questi giorni, è completa, comprendendo sia gli iscritti che i laureati per tutte le facoltà esistenti.

Varie lacune rendono in alcuni punti frammentaria la rilevazione : tra queste la più notevole ed importante è quella relativa agli anni dal 1729 al 1813, per i quali sono andati smarriti del tutto i registri scolastici ed unica fonte trovata fu una nota di « Matricole » per gli anni 1754-1769 ; essa pure, però, in così miserande condizioni di conservazione da non poter essere utilizzata.

Gli inconvenienti, poi, derivanti dalla cattiva grafia del tempo e dallo stato di mala conservazione dei registri rappresentarono anche in altri casi una non lieve difficoltà, da aggiungersi a quelle — dovute soprattutto alla diversa toponomastica di quel tempo rispetto ad oggi — che si incontrarono nel determinare la provenienza degli studenti e per superare le quali fu necessario ricorrere ben spesso all'ausilio di un dizionario geografico del secolo XVIII.

In ogni modo potemmo seguire abbastanza fedelmente tale provenienza distinguendo anzitutto gli studenti in due grandi categorie : nazionali ed esteri, e discendendo poi a maggiori dettagli col distinguere tra i nazionali quelli provenienti dall'Italia settentrionale, dalla centrale e dalla meridionale e fra gli esteri le rispettive nazionalità. A mettere meglio in evidenza questa distribuzione ed a rendere le cifre dei varî anni confrontabili tra loro, cioè indipendenti dall'ammontare complessivo del numero degli studenti, calcolammo le percentuali che gli appartenenti alle singole regioni o Nazioni rappresentavano sul totale.

2. — La fondazione dell'Università è fatta risalire — dagli storici più attendibili (1) — al 20 Aprile 1303, data in cui il Papa Bonifacio VIII con una sua celebre Bolla iniziava a nuova vita, verso la futura

(1) Le stesse origini dell'Università Romana sono state oggetto — fino a qualche tempo fa — di viva discussione da parte dei suoi varî storici, essendovene alcuni che pretendevano farne risalire la fondazione ai tempi di Numa e degli Imperatori Cristiani del X sec. sotto la dominazione Longobarda (G. CARAFA : *De Gymnasio Romano*, Romae, 1751) ; altri invece che sulla fede di S. Domenico volevano ricongiungere l'origine di essa alle concessioni fatte da Onorio III e Innocenzo IV per gli studi di diritto canonico e civile.

Università odierna, lo « Studium Generale », che già Carlo d'Angiò aveva concesso a Roma (Editto del 14 Aprile 1265).

Allora gli Studî di Bologna e di Padova decaddero alquanto dal loro splendore e non raggiunsero più — come Bologna mezzo secolo prima di quel pontificato — la cospicua cifra di 10-15 mila studenti; nè più l'Università di Parigi attirò romani anche illustri, quali Romano Orsini ed Egidio Colonna, perchè Roma, riprendendo la sua tradizione di sapienza, si risollevava nello spirito abbattuto proprio al sorgere del luminoso secolo di Dante.

E per quanto negli anni immediatamente successivi lo Studio decadesse per l'incuria dei Papi e dei Governanti, sì da far sentire la necessità di chiamarvi ad insegnare professori stranieri con lauti stipendî (1), tuttavia per la sua liberalità e tolleranza e per l'attività accentratrice della Curia, l'Archiginnasio romano, divenne la sede di ogni studio giuridico, stabilendo quasi in Roma « Il Tribunale Giuridico Universale del Mondo Cristiano ».

A Roma accorrevano — chiamati dalla fama dei Maestri — studenti venuti da ogni parte d'Italia, dalla Sila alla Valsolda e Valsesia, e studiosi stranieri della Spagna, Francia, Germania, Belgio, Polonia, Olanda, Grecia, Inghilterra.

Successivamente l'Archiginnasio attraversò un periodo di gravissima crisi in seguito agli scismi e alle lotte di Cola di Rienzo e di Francesco Baroncelli e che si protrasse anche sotto il pontificato di Innocenzo VII, nonostante che questi chiamasse ad insegnarvi maestri, quali il Crisolora, eccellentissimi in ogni disciplina. Solo nel 1431 con Eugenio IV, che fu chiamato quasi suo secondo fondatore, l'Archiginnasio inizia il suo periodo più luminoso, che dovrà culminare sotto il mecenatismo di Leone X.

La sede che nella seconda metà del secolo XIV il Magistrato Capitolino aveva trasferito in Trastevere ritorna in questo periodo a Sant'Eustacchio (Bolla del 10 Ottobre 1431), e l'Archiginnasio — assicuratasi ormai l'esistenza con l'introito delle imposte sul vino forestiero, ad esso devoluto da Eugenio IV — segue e accompagna gli sviluppi del « Rinascimento ».

Sono di questi tempi Lorenzo Valla, Poggio Bracciolini, il Crisolora, il Cardinal Bessarione, Pomponio Leto, Flavio Biondo, il Platina e il futuro Pio II, Enea Silvio Piccolomini.

---

(1) I lettori delle diverse cattedre avevano infatti degli stipendi variabili dai 40 ai 200 fiorini d'oro.

Gli studi che con Paolo II avevano segnato un rallentamento notevole, quasi una sosta e una decadenza, ripresero però via via più vigore e più vivo impulso sotto i successori Sisto IV e Giulio II, malgrado che allora molte leggi retrive ne ostacolassero, più che facilitassero, lo sviluppo.

Nuovo e più vivo impulso, però, esso ebbe col pontificato di Leone X il quale — dettata la costituzione (4 Novembre 1513), che doveva regolare gli studi — si rivolse con ogni sua cura a quelli, provvedendo a chiamarvi i più famosi maestri, ma disciplinandone al tempo stesso le loro attività nella maniera più proficua per gli studenti (1). Nel 1514 gli insegnanti erano assai numerosi, come si apprende dall'antico « Rotulo leoniano », e precisamente erano: 20 giuristi, 15 di medicina e 5 di filosofia, che costavano la elevatissima somma di 14 mila fiorini d'oro.

Infatti la morte di questo Papa fu una sventura per l'Università, che, languendo sotto Adriano VI e Clemente VII, fu estinta nel 1527 col sacco di Roma. Risorse di lì a pochi anni per le cure di Paolo III Farnese, matematico e astronomo insigne, il quale agli studi letterari e giuridici aggiunse anche quelli scientifico-sperimentali. Fu così che vennero in fama le scuole mediche di Roma e Bartolomeo Eustacchio da S. Severino potè introdurre senza pericolo di anatèma, nella libera indagine scientifica, la sezione dei cadaveri, facendo così progredire rapidamente l'anatomia insieme agli studi fisico-biologici.

A quest'epoca però comincia ad apparire anche nei pubblici atti pontifici — in sostituzione dell'antica di « Studio Generale » — la denominazione di « *Sapienza* », con cui anche oggi viene designato il principale edificio universitario.

Molto fece per essa Alessandro VII, che solennemente nel 1660 ne inaugurava l'anno accademico, dopo averla arricchita di una biblioteca e di un orto botanico: spettava però alla munificenza di Sisto V donare all'Università 22 mila *scudi* perchè potesse estinguere i debiti e proseguire nella sua fabbrica. Senonchè portato anche quì lo spirito accentratore del Papa, l'Università ne fu danneggiata assai, specialmente nelle discipline letterario-giuridiche, che finirono per coinvolgere nella loro decadenza anche le scienze mediche e fisico-naturali, per quanto vi insegnassero uomini valorosissimi, quali

---

(1) Egli stabilì infatti, che essi fossero tutti dediti alle scuole e quasi per nulla al Fòro, perchè gli scolari, anche attraverso libere discussioni « post finitas lectiones », potessero maggiormente profittare del loro insegnamento.

Andrea Cesalpino e Gian Maria Lancisi nell'un campo e nell'altro, l'Abate Benedetto Castelli, discepolo di Galilei e maestro del Torricelli, del Cavalieri e del Borelli.

Tali condizioni potevano, però, considerarsi anche un prodotto dei tempi, in cui la Chiesa — già indebolita dalla guerra con Filippo II — lottava contro le eresie di mezza Europa, e gli studi legali, teologici e filosofici venivano disertati da maestri e da scolari per andare invece in scuole di Gesuiti, sorte allora a rivaleggiare con l'Università Pontificia (1).

Aggiungendosi a ciò le restrizioni imposte agli studi dall'Indice e dalla Inquisizione, che la mente ormai abituata alle discussioni e alle ricerche del Rinascimento non poteva più tollerare, gli studiosi diminuirono progressivamente e l'Università Romana languì nel torpore.

3. — È appunto da questo periodo che possiamo cominciare a seguire la storia nelle risultanze della nostra indagine statistica. Mentre negli anni anteriori il numero dei laureati era stato assai più elevato, nel 1560-61 ne notiamo soltanto 25, di cui nessuno è straniero. Dall'estero, d'altra parte, gli studiosi accorrevano ancora in numero assai scarso, e solo nel 1590-91 si può riscontrare la presenza di: 1 Belga, 3 Francesi, 3 Polacchi, 3 Spagnuoli, le cui nazionalità — insieme all'Olandese — ricorrono più di frequente nella distribuzione generale fatta tra gli stranieri. Generalmente la presenza di costoro — come anche in parte per i nazionali delle varie regioni d'Italia — è giustificabile con i rapporti politici delle rispettive patrie con Roma.

Così infatti nel 1606-07, quando il Papa di tendenze politiche francesizzanti tentò di suscitare contro Venezia — in lotta con i Turchi — una nuova lega di Cambrai, notiamo che negli 11 studenti provenienti dell'Italia settentrionale sono del tutto assenti i Veneti e che circa metà degli stranieri sono tutti Francesi. La politica, combinata talvolta ad altre cause, comincia così a mostrare le sue influenze sulle sorti dell'Archiginnasio, determinandone talvolta — come appunto nel 1607 — diminuzioni più o meno sensibili, oppure — come nel 1632 — il più alto incremento.

Mai infatti, da quanto ci risulta, l'Archiginnasio superò la cifra di 178 studenti, che fu appunto raggiunta in quell'anno. Non alla po-

---

(1) Nel 1556-57 infatti la media normale dei laureati, che si aggirava sulla cinquantina, discende bruscamente a 20.

litica è invece dovuta la sensibile diminuzione dei laureati riscontrata nel 1648-49, ma probabilmente ad una pestilenza importata in Roma da profughi siciliani e napoletani, i quali accorsero in questa città numerosi quando appunto di questi tempi Masaniello insorgeva a Napoli e il suo esempio provocava le rivolte di Palermo e di Messina.

Del resto una terribile pestilenza comune a diverse città d'Italia infierì pochi anni appresso culminando in una forte crisi, che costrinse a Roma le supreme autorità ad ordinare la chiusura dell'Archiginnasio e l'interruzione del commercio. Di qui lo squilibrio fortissimo riscontrato nell'anno 1655-56 in cui da 149 laureati si discende ad 8 laureati (1).

Altre oscillazioni nel numero dei laureati si riscontrano negli anni 1684-85 e 1700-01, relativamente alle quali, però, non si ha nessuna indicazione sulle cause che poterono determinarle. Solo può dirsi, in tesi generale, che anche qui le lotte di Venezia con i Turchi e delle altre città italiane con gli Spagnuoli e gli Austriaci, che si contendevano il predominio nella nostra penisola, avendo reso oltremodo difficili le comunicazioni con Roma, portarono ad una considerevole diminuzione nel concorso di studenti extra-laziali, specialmente dall'Italia settentrionale.

Se infatti prendiamo a considerare la variabilità delle percentuali secondo cui accorrevano a Roma gli studenti delle diverse regioni d'Italia, vedremo che in corrispondenza di questo volger d'anni risulta per l'Italia settentrionale un minimo di 4,9 % nel 1684-85 e di 2,8 % nel 1703 : assenti anche qui del tutto i Veneti, le cifre confermano l'ipotesi.

Di questi anni stessi improvviso e notevolissimo è al contrario l'aumento del concorso degli stranieri : da 6 che se ne contavano nel 1683-84, nell'anno successivo si sale a 20 ; nel 1700 se ne contano : 1 Austriaco, 3 Belgi, 4 Francesi, 7 Tedeschi, 2 Polacchi, 1 Svizzero e 3 Turchi ; e nel 1701 : 2 Austriaci, 3 Belgi, 1 Francese, 5 Tedeschi, 1 Croato, 4 Polacchi e 5 Spagnuoli, cioè anche in quest'anno complessivamente 21.

Qui venuti con gli eserciti combattenti per sottomettere l'Italia al loro dominio, questi stranieri vi rimangono poi ad apprendere spe-

---

(1) La spiegazione ne è data dallo stesso Segretario, che in una nota avverte come « Si rarus est numerus doctorum laureatorumque mirum non sit : nam, pestilentia hic per italicas quamplurimas urbes et praecipue Romae crudeliter gravanti e Neapoli deducta, clausa fuere gymnasia et pubblicum commercium ».

cialmente quel Diritto Civile e delle Genti, che poi essi stessi insegneranno in Patria. Infatti, mentre la quasi totalità degli studenti nazionali si laureava in Diritto Canonico, gli studenti stranieri preferivano invece il Diritto Civile e delle Genti, divenendovene poi alcuni Maestri famosi, quali Giorgio Westendorpius, Francesco Velasquez, Gomez Gonzales di Salamanca, ecc.

Del resto forse tutti i principali centri di studi — non soltanto Roma — dovettero risentire le dannose conseguenze delle guerre o dei varî predominî: il movimento decrescente si manifesta, infatti, con tanto più intensità, quanto più il territorio è esposto alle incursioni degli invasori e la città è oggetto di contesa politica tra potenti Stati belligeranti. Considerevole a Padova — ove i provenienti da regioni dell'Italia settentrionale, eccetto il Veneto, discendono da sette a cinque, a tre, a uno negli anni 1681-82 . . . 1684-85 — è minore a Ferrara ove su dieci laureati sei sono Ferraresi e soltanto quattro sono delle altre regioni d'Italia.

Queste interessanti caratteristiche denotano un fenomeno non più semplicemente locale, ma di molto più vasta complessità e combinato alle vicende della Nazione intera.

4. — Il secolo XVIII era stato per l'Archiginnasio, da Innocenzo XII a Pio VI, un periodo di riforme; ristabilita la disciplina e la severità degli studi, divisi nelle tre classi di giurisprudenza, di medicina e delle arti, per opera del Cardinale Spinola sotto Clemente XI (Editti del 20 Febbraio 1700 e 2 Ottobre 1702) la Sapienza era risorta alla vita.

Ben più importanti innovazioni dovevano, però, essere arrecate da Benedetto XIV (1): per esse il Rettore veniva emancipato dalla eccessiva soggezione al Camerlengo, con l'incarico però di coordinare e regolare le materie, l'ordine ed il metodo d'insegnamento; le cattedre erano conferite — contro la consuetudine sino allora vigente — per concorso e fu vietato il passaggio dei Lettori da una Cattedra all'altra a scopo di maggior lucro, giacchè per gli aumenti di stipendio si teneva solo conto dei servigi prestati. Inoltre vennero soppresse cattedre affatto superflue, disciplinata e migliorata la condizione dei Lettori in sopra numero ed istituite nuove cattedre di scienza come quella della Chimica (1750), dotandole per la prima volta del materiale scientifico occorrente.

---

(1) Bolle «Inter conspicuos ordines» (29 Agosto 1744) e «Quanta reipublicae commoda» seguìte poi dall'Editto del 14 Ottobre 1748.

Ma non bastava : col favore del Papa e di Cardinali venivano istituiti varî Musei, come quello Cristiano in Vaticano, e il Mineralogico nel Collegio Nazareno, mentre il Duca Francesco Caetani di Sermoneta impiantava al Collegio Romano un osservatorio astronomico ed Ennio Quirino Visconti col Winckelmann rimetteva in onore l'archeologia.

Ma le rivalità sempre vive tra la Curia e le istituzioni nuove, gli avvenimenti politici, che si aggravavano sempre di più, non potevano certo favorire gli studî per quanto essi non fossero indirizzati a secondare alcuna tendenza di lotta politica ; languirono perciò sotto Pio VI durante il periodo repubblicano, finchè nel 1800 non ne fu stabilita la chiusura. Si riapriva però l'anno successivo sotto Pio VII Chiaramonti.

Caduto intanto Napoleone, tutti gli ordinamenti inspirati ai concetti francesi, e che Pio VII aveva concesso per amore di pace, furono revocati da Leone XII Della Genga, che con un nuovo ordinamento (1) distruggeva ogni tradizione laicizzante dell'Università Romana.

Ripristinato il Santo Uffizio e ristabilita la « Compagnia di Gesù » nell'insegnamento universitario, ogni autonomia d'indirizzo sì scientifico che di pensiero veniva soppressa sia per gl'insegnanti che per gli alunni ; i testi che non fossero uniformati a quei concetti o non autorizzati dal « *placet* » dell'autorità ecclesiastica erano banditi, perchè insegnavano « *l'errore* » : tutto era rigorosamente sottoposto all'inquisizione della Congregazione degli studi.

Proibito l'insegnamento dell'economia politica, mancanti quello di diritto pubblico e di procedura civile, oltre ad altre materie importanti nella facoltà matematica e medica, gli studi erano limitati entro stretti orizzonti e senza bravi maestri. Infatti, dopo un periodo stazionario di 5 o 6 anni, la tendenza ascendente, che si era manifestata tra qualche debole oscillazione negli anni dal 1820 al 1824, viene arrestata da una improvvisa diminuzione di circa un centinaio di iscritti e bisognerà giungere sino al 1832-33 per poter notare nuovamente una lenta ma progressiva e costante ripresa. Questa però non doveva essere duratura : il rigore riformatore, mantenuto senza attenuazioni sotto Gregorio XVI, dopo il breve e pacifico pontificato di Pio VIII, doveva condurre la Sapienza ad uno stato non certo di splendori e da

---

(1) « Quod Divina Sapientia » (Bolla del 28 agosto 1824) Cfr. anche l'allocuzione pontificia del 5 novembre 1824.

cui nè Pellegrino Rossi nè il Triumvirato potranno risollevarla : che anzi il Pontefice col « *motu-proprio* » : « L'Uniformità del Regime » (28 Dicembre 1852) rese più rigida la riforma togliendo ogni giurisdizione agli avvocati concistoriali e avocando a sè la nomina del Rettore. Le conseguenze di una tale linea di condotta non tardarono, però, a verificarsi e successivamente di anno in anno gli studenti si ridussero da circa 500 a 360.

Vi fu — negli anni successivi — un tentativo di reazione, che portò ad un sensibile miglioramento : il numero degli studenti risale con accrescimento costante verso notevoli cifre. Nel 1860 vi sono 613 iscritti ; nel 1863, 709 ; nel 1866, 848 ; nel 1867, 913 ; e da ultimo nel 1869, 1021 : in poco più di un decennio il numero degli studiosi si era quasi quadruplicato.

Ma le sorti della Sapienza saranno definitivamente rialzate dalla liberazione di Roma e dalla sua proclamazione a Capitale del Regno.

Infatti il Governo di Vittorio Emanuele con liberale munificenza destinava 700.000 lire agli Istituti di Fisica e Anatomia, riconfermandovi ad insegnare i professori migliori e sostituendo gli altri con le più note celebrità della scienza. Riordinati gli studi in ogni campo, aggiunte dieci nuove cattedre alle esistenti, sostituite le Facoltà ai Collegi dei Dottori e affidata al Venturoli la direzione della Scuola di Applicazione degli Ingegneri, la « Sapienza » fu avviata veramente a divenire il futuro « Centro massimo degli studi » di Roma.

Soppresse nel 1876 le scuole pontificie, che si erano trasferite dal 1870 al Palazzo Altemps, gli studenti incoraggiati dal Ministro della Pubblica Istruzione riprendevano rapidamente l'ascesa e da 519 iscritti — quanti se ne contavano nel 1875-76 — si dovevano raggiungere ai giorni nostri le notevoli cifre di 4-6 mila studenti. Il progressivo e rapido innalzamento, però, è interrotto bruscamente nel 1915-16 dalla Grande Guerra, in cui si discende a 3959 studenti, per toccare però l'apice della curva ascensionale intorno alle cifre di 5426-5946 per gli studenti e di 676-964 pei laureati, in corrispondenza degli anni 1919-21.

Ciò è dovuto al forte numero degli studenti, che, costretti a sospendere gli studi a causa del servizio militare, appena terminata la guerra, furono da provvide leggi messi in grado di laurearsi al più presto e si accumularono quindi in detti anni.

Del resto, come si accennò al principio, la divisione in anni di corso per tutto questo periodo (1870-1931) mostra molto chiaramente

l'incremento annuale della popolazione studentesca e permette anche una facile rilevazione delle variazioni percentuali, subìte da quella durante il periodo di tempo dalla immatricolazione alla laurea. Tali variazioni sono da attribuirsi — quando si verifica una diminuzione progressiva — a morti, ad interruzione definitiva degli studi e specialmente a migrazioni verso altre Università ; oppure — quando si nota il fenomeno contrario — ad iscrizione regolare di ex-uditori, al passaggio all'anno successivo di altra facoltà, a immigrazioni da altre Università, dovute sopratutto alla maggiore importanza che può assumere, agli effetti di un eventuale concorso, l'aver conseguito la laurea in questo Ateneo anzichè in altra sede di studi superiori.

Nelle fattispecie, però, non si notano — fino al 1922-23 — sensibili squilibri tra gli studenti dei varî corsi successivi e tra i laureandi e i neo-laureati per anni corrispondenti : ciò indica, oltre alla persistente costanza del rapporto, anche l'alto coefficiente di promovibilità e laureabilità raggiunta nel nostro Ateneo.

Ingente è infatti tanto il numero dei laureati, quanto quello degli studenti che ogni anno s'immatricolano nelle varie facoltà : basterà infatti considerare le cifre per i seguenti anni dal 1922-23 ad oggi. In quell'anno si contavano ben 953 laureati su 5603 iscritti, che nel 1923-24 e nel 1924-25 diminuirono rispettivamente di circa 500 sui totali complessivi degli studenti e di 230 e 70 su quelli dei laureati.

Ad un fenomeno certamente concomitante è dovuto la costante diminuzione degli studenti iscritti ai due ultimi anni di corso e che si rileva dalla corrispondente ripartizione fatta tra gli studenti. Nella facoltà di Lettere gli iscritti al 3° anno di corso nel 1924-25 diminuiscono infatti da 156 a 131 laureandi nel 1925-26 e dei quali si laurearono soltanto 45 ; analogamente per le Scienze, in cui da 156 si discese a 136, laureandosene di costoro appena 38. Nella Giurisprudenza sopratutto, però si nota — in confronto — una bassissima percentuale di laureati : di 438 — a cui fu elevata la cifra di 399 iscritti al precedente anno di corso nel 1924-25, in seguito specialmente ad immigrazioni probabili da altre Università — soltanto 130 conseguirono la laurea ; subito seguìta in tale graduatoria dalla facoltà di Medicina e Chirurgia, in cui dei 372 laureandi non se ne addottorarono che 97. La Facoltà di Chimica-Farmacia sembrerebbe a prima vista fare eccezione con i suoi risultati al fenomeno osservato, ma essa invece forse più delle altre ne risentì l'influenza, che già del resto da diversi anni precorreva. Infatti tra i 22 laureati non ve n'è con tutta probabilità nessuno dei 12 iscritti al 5° anno, e che al 4° anno nel 1924-25 furono

58. Tale cifra fu solo dovuta molto probabilmente ai « fuori corso » che ogni anno ne andavano ad accrescere la schiera già assai numerosa.

Ciò nonostante rileviamo sin dal 1925-26 — dalla suddetta ripartizione degli studenti in anno di corso — un progressivo incremento nel numero degli immatricolati alle Facoltà generalmente più frequentate, e i totali generali si avvicinano con rapida progressione alle cifre degli anni del massimo incremento.

Dal 1925-26 al 1930-31 la popolazione studentesca si accresce di oltre un migliaio di iscritti, e i laureati seguono di pari passo la ripresa. L'urbanesimo ne influenza principalmente le cifre, chiamando a Roma ben il 33 % dalle provincie meridionali ; nè questo continuo afflusso di meridionali tende a diminuire o a una sosta.

Ciò ha fatto tornare di urgente attualità in questi ultimi tempi anche un grave problema : l'edilizio, che non fu affrontato al suo primo apparire adeguatamente alle nuove necessità arrecate dallo svilupparsi degli studi. Infatti allora (1888) si lasciò che il progetto del Rettore Cerruti sulla « Città Universitaria » rimanesse un'idea grandiosa ed una aspirazione per l'avvenire, futuro compito dei suoi successori.

In ogni modo si può ora affermare che, a merito delle assidue cure dedicate dal Regime Fascista, l'Ateneo Romano è avviato verso la fase del suo massimo splendore.

Per esso, che è l'Ateneo del Regime, e per la concorde armonia di professori e studenti, operanti ugualmente tutti nella certezza e nella luce di una fede, che non può aver tramonto, Roma — già incamminata sulla via delle antiche sue luminose fortune — diventerà sempre più cosciente della sua divina missione di Maestra di civile sapienza nel mondo.

Nota. — Nel presente studio non sono state considerate la Scuola di Applicazione d'Ingegneria e le Facoltà dl Scienze Economiche-Commerciali e di Magistero, perchè, essendo esse Istituti Superiori del tutto a sè, esulavano dal nostro compito.

FONTI

Per il periodo antico e del risorgimento : Registri conservati all'Archivio di Stato.

Per la parte moderna : Annuari ufficiali dell'Università.

BIBLIOGRAFIA

CARAFFA GIUSEPPE : *De Gymnasio Romano.* Romae, Fulgoni 1751, libri, 2 in 4°.

Regolamento dell'Archiginnasio Romano. Roma, Perego-Salvioni, 1788, in 8°.

RENAZZI FILIPPO MARIA : *Storia dell'Università degli studi di Roma detta comunemente la « Sapienza »*, Roma, Pagliarini, 1803-1806, vol. 4.

Relazioni e notizie intorno alla R. Università di Roma. Roma, Civelli, 1873.

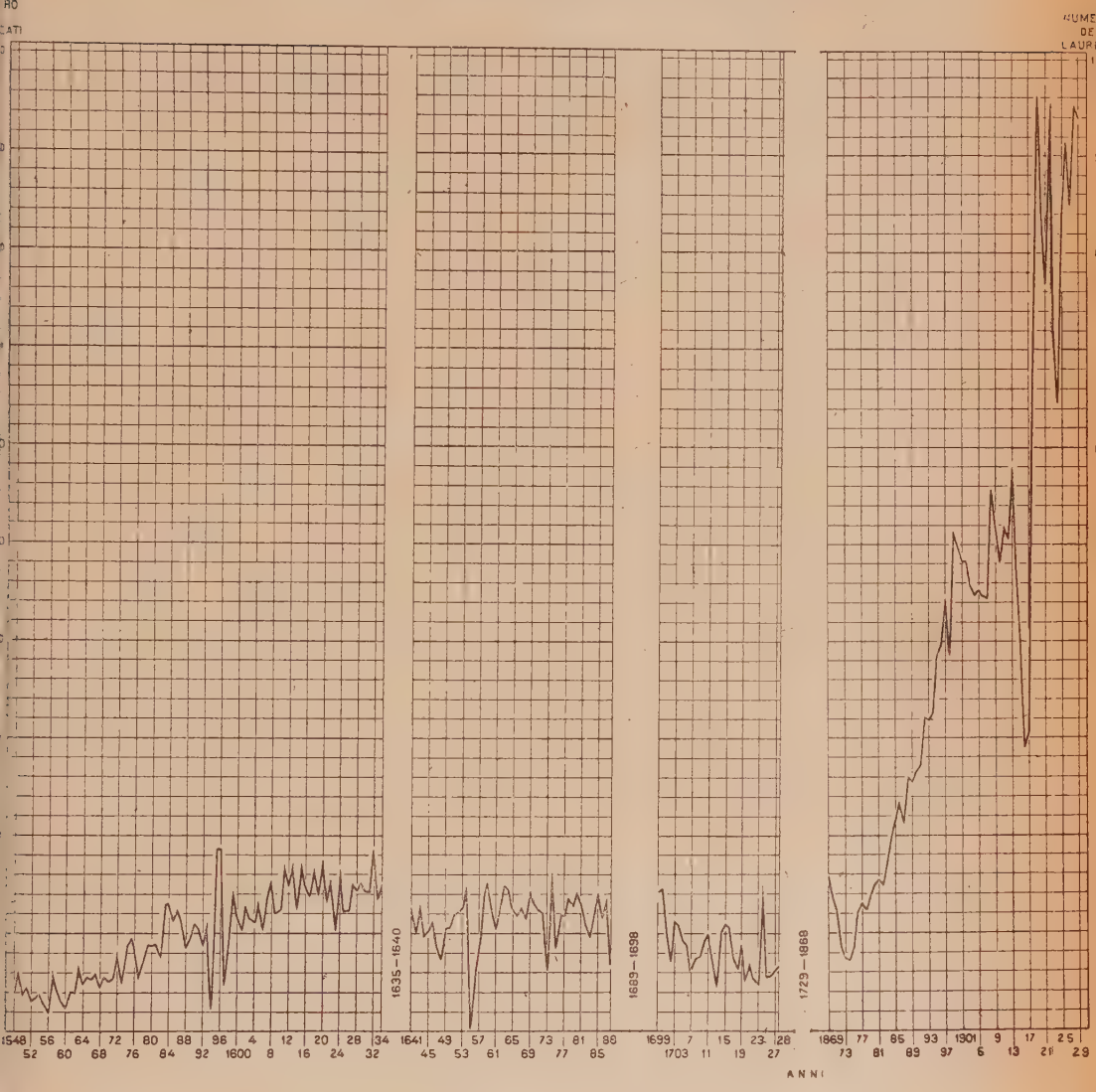
MORPURGO EMILIO : *Roma e la Sapienza.* Roma, Tip. Elzeviriana, 1881.

MORONI : *Dizionario di erudizione storica ecclesiastica,* Roma.

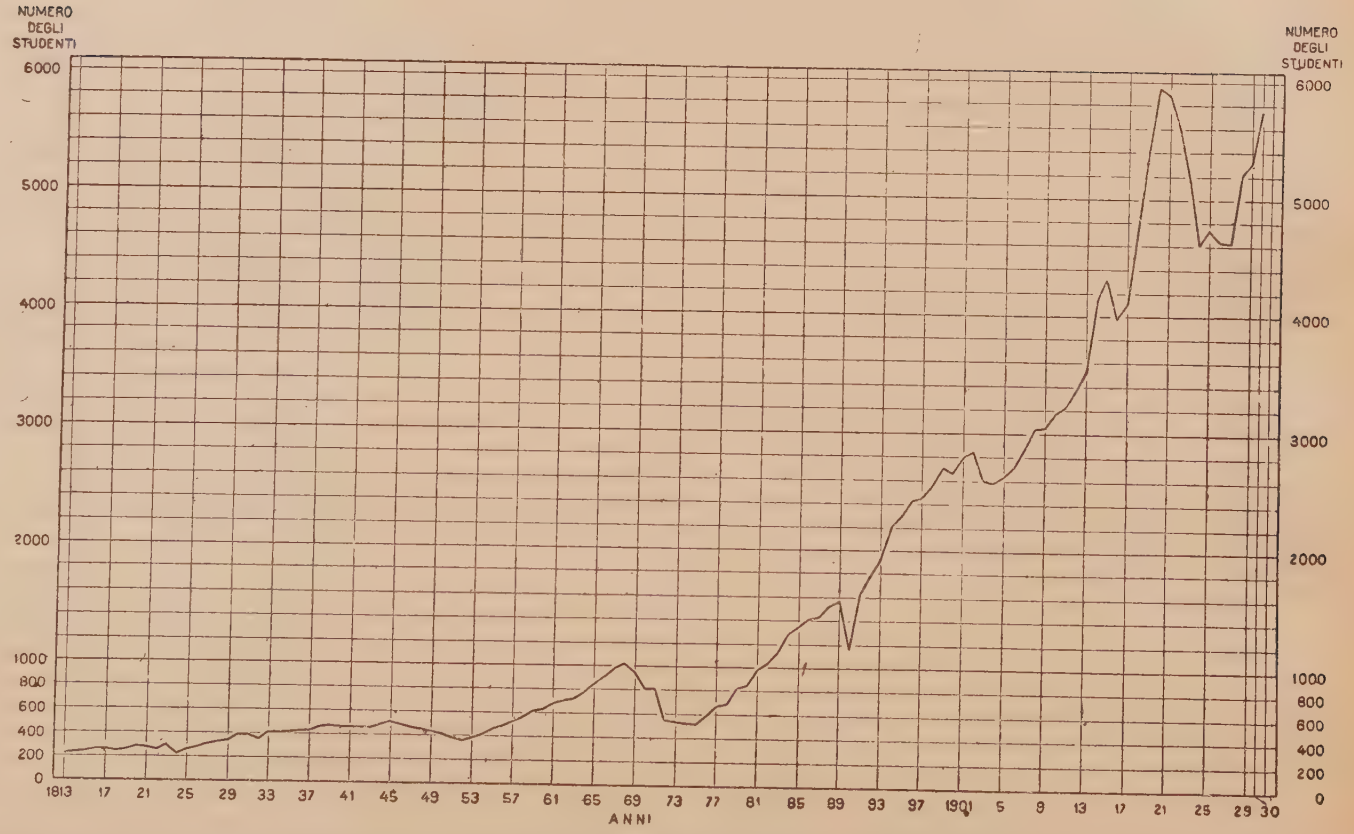
— *L'Università di Roma.* Monografia promossa dal Rettore DEL VECCHIO, Roma, Stab. Poligrafico dello Stato, 1927-VI.

Oltre le relazioni pontificie e le relazioni di Francesco Brioschi al Ministro Correnti, del Rettore Carlucci (Annuario delle R. Università degli studi di Roma 1870-71) etc.

Numero dei laureati nell'Università di Roma dall'Anno accademico 1548-49 ai nostri giorni.



Numero degli studenti inscritti nell'Università di Roma dall'Anno accademico 1813-14 ai nostri giorni.



I.

Parte Antica

(1548-1729)

TAVOLA I.

Totali parziali dei Laureati in « Utroque Jure ».

ANNI ACCADEMICI	Totale dei Laureati	ANNI ACCADEMICI	Totale dei Laureati	ANNI ACCADEMICI	Totale dei Laureati
1548–49	40	1576–77	87	1604–05	112
1549–50	63	1577–78	58	1605–06	133
1550–51	40	1578–79	75	1606–07	106
1551–52	46	1579–80	(89)	1607–08	138
1552–53	32	1580–81	(88)	1608–09	154
1553–54	35	1581–82	(90)	1609–10	120
1554–55	39	1582–83	78	1610–11	123
1555–56	26	1583–84	129	1611–12	170
1556–57	20	1584–85	132	1612–13	151
1557–58	62	1585–86	115	1613–14	172
1558–59	43	1586–87	125	1614–15	129
1559–60	30	1587–88	114	1615–16	172
1560–61	25	1588–89	87	1616–17	149
1561–62	41	1589–90	97	1617–18	139
1562–63	40	1590–91	111	1618–19	167
1563–64	68	1591–92	105	1619–20	141
1564–65	50	1592–93	90	1620–21	175
1565–66	56	1593–94	112	1621–22	136
1566–67	53	1594–95	(32)	1622–23	155
1567–68	60	1595–96	370	1623–24	109
1568–69	47	1596–97		1624–25	165
1569–70	56	1597–98	(51)	1625–26	122
1570–71	51	1598–99	110	1626–27	123
1571–72	54	1599–1600 . . .	143	1627–28	151
1572–73	82	1600–01	118	1628–29	144
1573–74	54	1601–02	104	1629–30	152
1574–75	86	1602–03	129	1630–31	142
1575–76	96	1603–04	115	1631–32	141

Segue TAVOLA I.

Totali parziali dei Laureati in « Utroque Jure ».

ANNI ACCADEMICI	Totale dei Laureati	ANNI ACCADEMICI	Totale dei Laureati	ANNI ACCADEMICI	Totale dei Laureati
1632–33	185	1665–66	125	1702–03	75
1633–34	136	1666–67	118	1703–04	113
1634–35	149	1667–68	127	1704–05	109
1635–41	—	1668–69	117	1705–06	92
1641–42	126	1669–70	144	1706–07	88
1642–43	104	1670–71	130	1707–08	62
1643–44	131	1671–72	124	1708–09	74
1644–45	99	1672–73	121	1709–10	76
1645–46	104	1673–74	71	1710–11	91
1646–47	113	1674–75	162	1711–12	100
1647–48	87	1675–76	90	1712–13	73
1648–49	76	1676–77	119	1713–14	50
1649–50	106	1677–78	118	1714–15	102
1650–51	107	1678–79	136	1715–16	110
1651–52	119	1679–80	129	1716–17	107
1652–53	121	1680–81	143	1717–18	74
1653–54	127	1681–82	131	1718–19	66
1654–55	149	1682–83	110	1719–20	90
1655–56	8	1683–84	98	1720–21	53
1656–57	64	1684–85	121	1721–22	70
1657–58	89	1685–86	142	1722–23	53
1658–59	137	1686–87	119	1723–24	48
1659–60	153	1687–88	135	1724–25	149
1660–61	122	1688–89	68	1725–26	55
1661–62	107	1689–99	—	1726–27	56
1662–63	128	1699–1700 . . .	142	1727–28	61
1663–64	149	1700–01	146	1728–29	66
1664–65	145	1701–02	103		

ANNI ACCADEMICI	Italia settentrionale	Italia centrale extra Lazio	Laziali	Italia meridionale	TOTALE DEI NAZIONALI	Albania	America meridionale	Austria	Belgio	Bulgaria	Egitto	Francia	Germania	Grecia	Inghilterra	Jugoslavia	Malta	Olanda	Polonia	Portogallo	Rodi	Rumania	Russia	Spagna	Svizzera	Turchia	Ungheria	TOTALE ESTERI	TOTALE GENERALE
1548–49	3	10	11	16	40	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	40
1549–50	7	16	17	23	63	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63
1550–51	2	9	12	17	40	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	40
1551–52	3	11	13	19	46	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	46
1552–53	2	9	9	12	32	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	32
1553–54	1	11	9	14	35	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	35
1554–55	2	9	11	17	39	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	39
1555–56	–	11	6	9	26	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	26
1556–57	–	8	5	7	20	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	20
1557–58	6	18	14	23	61	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	1	62
1558–59	3	14	10	15	42	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	43
1559–60	–	12	7	11	30	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	30
1560–61	2	8	6	9	25	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	25
1561–62	–	16	8	16	40	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	1	41
1562–63	3	11	10	14	38	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2	40
1563–64	7	23	13	24	67	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	68
1564–65	4	16	11	17	48	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	2	50
1565–66	5	17	14	16	52	–	–	–	–	–	–	–	1	–	1	–	–	–	1	–	–	–	–	1	–	–	–	4	56
1566–67	7	21	11	13	52	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	53
1567–68	4	19	12	23	58	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	2	60

1569–70	5	19	12	19	55	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	56
1570–71	2	13	13	19	47	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	3	–	–	–	4	51
1571–72	4	19	17	14	54	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	54
1572–73	7	22	19	28	76	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	4	–	–	–	–	–	1	–	–	–	6	82
1573–74	7	21	12	18	52	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	2	54
1574–75	8	19	22	33	82	–	–	–	3	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	4	86
1575–76	7	23	25	37	92	–	–	–	2	–	–	1	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	4	96
1576–77	9	22	21	32	84	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	3	87
1577–78	–	20	13	24	57	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	1	58
1578–79	6	14	22	32	74	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	75
1579–80	(8)	17	(26)	(37)	88	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	1	89
1580–81	(11)	18	(23)	(34)	86	–	–	–	1	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2	88
1581–82	(7)	21	(25)	(32)	85	–	–	–	–	–	–	3	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	1	–	–	–	5	90
1582–83	7	14	24	32	77	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	78
1583–84	13	22	39	52	126	–	1	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	3	129
1584–85	9	24	41	53	127	–	–	–	–	–	–	1	–	–	1	–	–	2	–	–	–	–	–	1	–	–	–	5	132
1585–86	8	21	36	44	109	–	–	–	1	–	–	2	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	1	–	–	–	6	115
1586–87	9	25	38	49	121	–	–	–	–	–	–	1	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	4	125
1587–88	11	21	37	45	114	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	114
1588–89	5	15	28	37	85	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	2	87
1589–90	6	14	33	42	95	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	2	97
1590–91	7	23	31	40	101	–	–	–	1	–	–	3	–	–	–	–	–	–	3	–	–	–	–	3	–	–	–	10	111
1591–92	3	18	37	46	104	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	1	105
1592–93	8	13	29	36	86	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	4	90

I Laureati distinti per luogo d'origine (1548-1729). Segue TAVOLA II.

ANNI ACCADEMICI	Italia settentrionale	Italia centrale extra Lazio	Laziali	Italia meridionale	TOTALE DEI NAZIONALI	Albania	America meridionale	Austria	Belgio	Bulgaria	Egitto	Francia	Germania	Grecia	Inghilterra	Jugoslavia	Malta	Olanda	Polonia	Portogallo	Rodi	Rumania	Russia	Spagna	Svizzera	Turchia	Ungheria	TOTALE ESTERI	TOTALE GENERALE
1593–94	6	19	38	42	105	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	3	–	–	–	7	112
1594–95	?	12	(7)	(13)	(32)	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	(32)
1595–96	?	?	?	?	(370)	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	(370)
1596–97						–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–						
1597–98	(3)	16	(11)	(19)	(49)	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	2	(51)
1598–99	9	18	38	43	108	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	2	110
1599–1600	8	21	51	56	136	–	1	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	2	–	1	–	7	143
1600–01	6	16	43	48	113	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	3	–	–	–	5	118
1601–02	4	14	39	47	104	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	104
1602–03	9	23	44	50	126	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	1	1	–	–	3	129
1603–04	7	26	35	38	106	–	–	–	–	–	–	3	2	–	–	–	–	–	3	–	–	–	–	1	–	–	–	9	115
1604–05	5	28	36	39	108	–	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	4	112
1605–06	8	27	45	47	127	–	–	–	–	–	–	2	–	1	–	–	–	–	3	–	–	–	–	–	–	–	–	6	133
1606–07	11	19	38	31	99	–	–	–	–	–	–	3	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	3	–	–	–	7	106
1607–08	12	14	57	48	131	–	–	–	1	–	–	2	1	–	–	–	–	–	3	–	–	–	–	–	–	–	–	7	138
1608–09	12	14	65	57	148	–	–	–	–	–	–	4	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	6	154
1609–10	7	18	48	41	114	–	–	–	–	1	–	1	–	–	–	–	–	–	4	–	–	–	–	–	–	–	–	6	120
1610–11	4	21	50	39	114	–	–	1	–	–	–	2	1	–	–	–	–	–	3	–	–	–	–	2	–	–	–	9	123
1611–12	17	16	77	54	164	–	–	–	–	–	–	2	1	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	1	–	1	–	6	170
1612–13	12	16	66	51	145	–	1	–	1	–	–	1	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	1	–	6	151

1614–15	5	17	51	46	119	–	2	1	–	–	–	1	1	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	4	–	–	–	10	129
1615–16	11	26	68	59	164	–	–	–	–	–	–	1	4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	3	–	–	–	8	172
1616–17	9	16	67	51	143	–	–	–	–	–	–	3	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	1	–	–	–	6	149
1617–18	7	25	54	47	133	–	–	–	1	–	–	2	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	6	139
1618–19	13	18	69	56	156	–	–	–	–	–	–	8	–	–	–	–	–	1	2	–	–	–	–	–	–	–	–	11	167
1619–20	8	21	58	49	136	–	–	–	–	–	–	4	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	5	141
1620–21	12	18	73	61	164	–	–	–	–	–	–	9	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	11	175
1621–22	6	22	55	46	129	–	–	–	–	–	–	3	1	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	1	–	7	136
1622–23	8	19	63	48	138	–	–	–	–	–	–	16	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	17	155
1623–24	4	15	47	33	99	–	–	–	–	–	–	9	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	10	109
1624–25	16	18	73	49	156	–	–	–	–	–	–	4	1	–	–	–	–	–	4	–	–	–	–	–	–	–	–	9	165
1625–26	8	7	54	42	111	–	–	–	–	–	–	7	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	2	–	–	–	11	122
1626–27	7	18	48	39	112	–	–	–	–	–	–	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	11	123
1627–28	12	12	67	44	135	–	–	–	–	–	–	7	4	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	1	–	2	–	16	151
1628–29	7	18	63	47	135	–	–	–	–	–	–	7	1	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	9	144
1629–30	13	12	64	51	140	–	–	–	–	–	–	10	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	12	152
1630–31	6	19	58	49	132	–	–	–	–	–	–	5	–	–	–	–	–	–	4	–	–	–	–	1	–	–	–	10	142
1631–32	9	14	67	48	138	–	–	–	–	–	1	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	3	141
1632–33	15	23	74	66	178	–	–	–	–	–	–	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	7	185
1633–34	5	18	58	44	125	–	–	–	1	–	–	8	1	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	11	136
1634–35	12	19	67	43	141	–	–	–	–	–	–	7	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	8	149
1635–36	Mancano i registri con i dati					–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
1636–37						–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
1637–38						–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

ANNI ACCADEMICI	Italia settentrionale	Italia centrale extra Lazio	Laziali	Italia meridionale	TOTALE DEI NAZIONALI	Albania	America meridionale	Austria	Belgio	Bulgaria	Egitto	Francia	Germania	Grecia	Inghilterra	Jugoslavia	Malta	Olanda	Polonia	Portogallo	Rodi	Rumania	Russia	Spagna	Svizzera	Turchia	Ungheria	TOTALE ESTERI	TOTALE GENERALE
1638–39	Mancano i registri con i dati					–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
1639–40						–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
1640–41						–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
1641–42	7	15	53	41	116	–	–	–	1	–	–	3	1	–	–	–	–	–	5	–	–	–	–	–	–	–	10	126
1642–43	3	16	44	31	94	–	–	–	–	–	–	2	1	–	–	–	–	–	7	–	–	–	–	–	–	–	10	104
1643–44	8	18	56	42	124	–	–	–	–	–	–	1	3	–	–	–	–	1	2	–	–	–	–	–	–	–	7	131
1644–45	9	22	39	26	96	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	3	99
1645–46	5	21	41	33	100	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	1	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	4	104
1646–47	3	26	42	35	106	–	–	–	–	–	1	1	–	–	–	1	–	–	2	–	–	–	1	–	–	1	7	113
1647–48	2	16	37	26	81	–	–	1	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	3	–	–	–	–	1	–	–	6	87
1648–49	–	18	34	20	72	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	4	–	–	–	–	–	–	–	4	76
1649–50	6	18	46	29	99	–	–	–	–	–	–	2	2	–	–	1	–	–	–	–	1	–	1	–	–	–	7	106
1650–51	4	23	38	29	94	–	–	–	–	–	–	3	3	–	–	–	–	–	6	–	–	1	–	–	–	–	13	107
1651–52	7	29	44	32	112	1	–	–	–	–	–	2	1	–	–	–	–	–	3	–	–	–	–	–	–	–	7	119
1652–53	3	34	42	35	114	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	4	–	–	–	–	–	–	1	7	121
1653–54	6	32	49	36	123	–	–	–	1	–	–	1	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	4	127
1654–55	11	31	53	48	143	–	–	–	–	–	–	2	2	–	1	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	6	149
1655–56	1	2	3	2	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	8
1656–57	2	18	26	15	61	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	1	–	–	3	64
1657–58	5	15	38	26	84	–	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	2	–	–	5	89

1659–60	14	25	61	49	149	–	–	1	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	4	153
1660–61	9	24	47	35	115	–	–	–	–	–	–	2	3	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	7	122
1661–62	4	22	46	34	106	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	107
1662–63	8	25	52	41	126	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	2	128
1663–64	13	28	59	44	144	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	1	–	–	–	5	149
1664–65	6	29	53	51	139	–	–	1	1	–	–	1	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	6	145
1665–66	5	27	47	39	118	–	–	–	1	–	–	2	2	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	1	–	–	–	7	125
1666–67	10	27	41	36	114	–	–	2	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	4	118
1667–68	7	31	45	39	122	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	3	–	–	–	1	–	–	–	–	5	127
1668–69	4	32	43	34	113	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2	2	–	–	–	–	–	–	–	–	4	117
1669–70	11	33	49	41	134	–	–	1	–	–	–	4	3	–	–	–	–	1	1	–	–	–	–	–	–	–	–	10	144
1670–71	10	27	47	42	126	–	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	4	130
1671–72	9	26	43	36	114	–	–	–	1	–	–	–	4	–	–	–	–	–	5	–	–	–	–	–	–	–	–	10	124
1672–73	5	31	41	37	114	–	–	–	–	–	–	2	4	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	7	121
1673–74	2	14	29	25	70	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	1	71
1674–75	13	27	54	47	141	–	–	–	1	–	–	3	9	–	–	–	–	6	–	–	–	–	1	–	–	1	–	21	162
1675–76	4	16	31	29	80	–	–	1	1	–	–	–	3	–	–	–	1	2	2	–	–	–	–	–	–	–	–	10	90
1676–77	9	28	38	34	109	–	–	–	3	–	–	–	5	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	1	–	–	–	10	119
1677–78	6	31	36	35	108	–	–	1	2	–	–	–	3	–	–	–	–	1	2	–	–	–	1	–	–	–	–	10	118
1678–79	12	24	49	46	131	–	–	–	2	–	–	–	1	–	–	–	–	1	–	–	1	–	–	–	–	–	–	5	136
1679–80	11	45	31	33	120	–	–	–	–	–	–	–	3	–	–	–	–	3	2	–	–	–	–	–	1	–	–	9	129
1680–81	8	43	34	38	123	–	–	–	4	–	–	–	1	–	–	–	–	12	3	–	–	–	–	–	–	–	–	20	143
1681–82	3	32	39	42	116	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	15	131
1682–83	5	32	31	34	102	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	5	–	–	–	–	–	–	–	1	–	8	110

ANNI ACCADEMICI	Italia settentrionale	Italia centrale extra Lazio	Laziali	Italia meridionale	TOTALE DEI NAZIONALI	Albania	America meridionale	Austria	Belgio	Bulgaria	Egitto	Francia	Germania	Grecia	Inghilterra	Jugoslavia	Malta	Olanda	Polonia	Portogallo	Rodi	Rumania	Russia	Spagna	Svizzera	Turchia	Ungheria	TOTALE ESTERI	TOTALE GENERALE
1683–84	3	32	24	33	92	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	3	–	–	–	–	–	1	–	1	–	6	98
1684–85	5	25	41	30	101	–	–	–	4	–	–	–	2	–	–	–	–	11	3	–	–	–	–	–	–	–	–	20	121
1685–86	11	31	46	33	121	–	–	–	2	–	–	1	1	–	–	–	–	15	–	–	–	–	–	2	–	–	–	21	142
1686–87	4	18	45	32	99	–	–	–	5	–	–	–	–	–	–	2	–	9	3	–	–	–	–	1	–	–	–	20	119
1687–88	7	20	52	39	118	–	–	–	2	–	–	–	2	–	–	–	–	9	1	–	–	–	–	–	1	1	1	17	135
1688–89	–	17	22	18	57	–	–	–	3	–	–	–	2	–	–	–	–	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	11	68
1689–90	Mancano i registri con i dati					–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
.....						–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
1698–99						–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
1699-700	12	36	41	32	121	–	–	1	3	–	–	4	7	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	1	3	–	21	142
1700–01	9	32	49	35	125	–	–	2	3	–	–	1	5	–	–	1	–	–	4	1	–	–	–	4	–	–	–	21	146
1701–02	5	28	40	24	97	–	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	2	–	–	–	6	103
1702–03	2	23	26	20	71	–	–	–	1	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	4	75
1703–04	8	26	41	34	109	–	–	1	–	–	–	–	1	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	4	113
1704–05	6	21	42	35	104	–	–	1	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	2	–	–	–	5	109
1705–06	3	19	37	29	88	–	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	4	92
1706–07	7	26	26	21	80	–	–	1	–	–	–	1	1	–	–	–	–	–	2	1	–	–	–	1	–	–	1	8	88
1707–08	2	15	22	18	57	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	2	–	–	–	4	62

| | | |

TAVOLA III.

Percentuali dei Laureati distinti per luogo d'origine.

ANNI ACCADEMICI	% Nazionali	% Esteri	TOTALE	% Italia Settentr.	% Italia Centrale	% Italia Meridion.	TOTALE
1548–49. . .	100.–	–	100.–	7.5	52.5	40.0	100.–
1549–50. . .	100.–	–	»	11.1	52.4	36.5	»
1550–51. . .	100.–	–	»	5.0	52.5	42.5	»
1551–52. . .	100.–	–	»	6.5	52.2	41.3	»
1552–53. . .	100.–	–	»	6.2	56.2	37.6	»
1553–54. . .	100.–	–	»	2.9	57.1	40.0	»
1554–55. . .	100.–	–	»	5.1	51.3	43.6	»
1555–56. . .	100.–	–	»	–	65.4	34.6	»
1556–57. . .	100.–	–	»	–	65.0	35.0	»
1557–58. . .	98.4	1.6	»	9.8	52.5	37.7	»
1558–59. . .	97.7	2.3	»	7.1	57.2	35.7	»
1559–60. . .	100.–	–	»	–	63.4	36.6	»
1560–61. . .	100.–	–	»	8.0	56.0	36.0	»
1561–62. . .	97.5	2.4	»	–	60.0	40.0	»
1562–63. . .	95.0	5.0	»	7.9	55.3	36.8	»
1563–64. . .	98.5	1.5	»	10.4	53.7	35.9	»
1564–65. . .	96.0	4.0	»	8.3	56.3	35.4	»
1565–66. . .	92.9	7.1	»	9.6	59.6	30.8	»
1566–67. . .	98.0	2.0	»	13.5	61.5	25.0	»
1567–68. . .	97.0	3.0	»	6.9	53.5	39.6	»
1568–69. . .	97.9	2.1	»	6.5	58.7	34.8	»
1569–70. . .	98.2	1.8	»	9.1	56.4	34.5	»
1570–71. . .	92.2	7.8	»	4.3	55.3	40.4	»
1571–72. . .	100.–	–	»	7.4	66.7	25.9	»
1572–73. . .	92.7	7.3	»	9.3	53.9	36.8	»
1573–74. . .	96.3	3.7	»	1.9	63.5	34.6	»
1574–75. . .	95.3	4.7	»	9.8	50.0	40.2	»
1575–76. . .	95.8	4.2	»	7.6	52.2	40.2	»

Segue TAVOLA III.

Percentuali dei Laureati distinti per luogo d'origine.

ANNI ACCADEMICI	% Nazionali	% Esteri	TOTALE	% Italia Settentr.	% Italia Centrale	% Italia Meridion.	TOTALE
1576–77. . .	96.6	3.4	100.–	10.7	51.2	38.1	100.–
1577–78. . .	98.3	1.7	»	–	57.9	42.1	»
1578–79. . .	98.7	1.3	»	8.1	48.6	43.3	»
1579–80. . .	98.9	1.1	»	9.1	48.9	42.0	»
1580–81. . .	97.7	2.3	»	12.8	47.7	39.5	»
1581–82. . .	94.4	5.6	»	8.2	54.1	37.7	»
1582–83. . .	98.7	1.3	»	9.1	49.4	41.5	»
1583–84. . .	97.7	2.3	»	10.3	48.4	41.3	»
1584–85. . .	96.2	3.8	»	7.1	51.2	41.7	»
1585–86. . .	94.8	5.2	»	7.3	52.3	40.4	»
1586–87. . .	96.8	3.2	»	7.4	52.1	40.5	»
1587–88. . .	100.–	–	»	9.6	50.9	39.5	»
1588–89. . .	97.7	2.3	»	5.9	50.6	43.5	»
1589–90. . .	98.0	2.0	»	6.3	49.5	44.2	»
1590–91. . .	91.0	9.0	»	7.0	53.4	39.6	»
1591–92. . .	99.1	0.9	»	2.9	52.9	44.2	»
1592–93. . .	95.6	4.4	»	9.3	48.8	41.9	»
1593–94. . .	93.8	6.2	»	5.7	54.3	40.0	»
1594–95. . .	100.–	–	»	–	59.4	40.6	»
	...	...	–	...	...	...	–
1595–97. . .	...	...	–	...	...	...	–
	...	...	–	...	...	...	–
1597–98. . .	96.1	3.9	»	6.1	55.1	38.8	»
1598–99. . .	98.2	1.8	»	8.3	51.9	39.8	»
1599–1600. .	95.1	4.9	»	5.9	53.0	41.1	»
1600–01. . .	95.8	4.2	»	5.3	52.2	42.5	»
1601–02. . .	100.–	–	»	3.8	51.0	45.2	»
1602–03. . .	97.7	2.3	»	7.1	53.2	39.7	»

Segue TAVOLA III.

Percentuali dei Laureati distinti per luogo d'origine.

ANNI ACCADEMICI	% Nazionali	% Esteri	TOTALE	% Italia Settentr.	% Italia Centrale	% Italia Meridion.	TOTALE
1603–04. . .	92.2	7.8	100.–	6.6	57.5	35.9	100.–
1604–05. . .	96.4	3.6	»	4.6	59.3	36.1	»
1605–06. . .	95.5	4.5	»	6.3	56.7	37.0	»
1606–07. . .	93.4	6.6	»	11.1	57.6	31.3	»
1607–08. . .	94.9	5.1	»	9.2	54.2	36.6	»
1608–09. . .	96.1	3.9	»	8.1	53.4	38.5	»
1609–10. . .	95.0	5.0	»	6.1	57.9	36.0	»
1610–11. . .	92.7	7.3	»	3.5	62.3	34.2	»
1611–12. . .	96.4	3.6	»	10.4	56.7	32.9	»
1612–13. . .	96.0	4.0	»	8.3	56.5	35.2	»
1613–14. . .	95.9	4.1	»	9.7	55.1	35.2	»
1614–15. . .	92.2	7.8	»	4.2	57.1	38.7	»
1615–16. . .	95.3	4.7	»	6.7	57.3	36.0	»
1616–17. . .	96.0	4.0	»	6.3	58.0	35.7	»
1617–18. . .	95.7	4.3	»	5.3	59.4	35.3	»
1618–19. . .	93.4	6.6	»	8.3	55.8	35.9	»
1619–20. . .	96.4	3.6	»	5.9	58.1	36.0	»
1620–21. . .	93.7	6.3	»	7.3	55.5	37.2	»
1621–22. . .	94.8	5.2	»	4.6	59.7	35.7	»
1622–23. . .	89.0	11.0	»	5.8	59.4	34.8	»
1623–24. . .	90.8	9.2	»	4.0	62.6	33.4	»
1624–25. . .	94.5	5.5	»	10.2	58.3	31.5	»
1625–26. . .	91.0	9.0	»	7.2	55.0	37.8	»
1626–27. . .	91.1	8.9	»	6.2	59.0	34.8	»
1627–28. . .	89.4	10.6	»	8.9	58.5	32.6	»
1628–29. . .	93.7	6.3	»	5.2	60.0	34.8	»
1629–30. . .	92.1	7.9	»	9.3	54.3	36.4	»
1630–31. . .	93.0	7.0	»	4.5	58.3	37.2	»

Segue TAVOLA III.

Percentuali dei Laureati distinti per luogo d'origine.

ANNI ACCADEMICI	% Nazionali	% Esteri	TOTALE	% Italia Settentr.	% Italia Centrale	% Italia Meridion.	TOTALE
1631–32. . .	97.9	2.1	100.–	6.5	58.7	34.8	100.–
1632–33. . .	96.2	3.8	»	8.4	54.5	37.1	»
1633–34. . .	91.9	8.1	»	4.0	60.8	35.2	»
1634–35. . .	94.6	5.4	»	8.5	61.0	30.5	»
1635–36. . .							
1636–37. . .							
1637–38. . .							
1638–39. . .	Mancano i registri con i dati						
1639–40. . .							
1640–41. . .							
1641–42. . .	92.1	7.9	100.–	6.1	58.6	35.3	100.–
1642–43. . .	90.4	9.6	»	3.2	63.8	33.0	»
1643–44. . .	94.7	5.3	»	6.4	59.7	33.9	»
1644–45. . .	97.0	3.0	»	9.4	63.5	27.1	»
1645–46. . .	96.1	3.9	»	5.0	62.0	33.0	»
1646–47. . .	93.8	6.2	»	2.8	64.1	33.1	»
1647–48. . .	93.1	6.9	»	2.5	65.4	32.1	»
1648–49. . .	94.7	5.3	»	–	72.2	27.8	»
1649–50. . .	93.4	6.6	»	6.1	64.6	29.3	»
1650–51. . .	87.8	12.2	»	4.3	64.9	30.8	»
1651–52. . .	94.1	5.9	»	6.2	65.2	28.6	»
1652–53. . .	94.2	5.8	»	2.6	66.7	30.7	»
1653–54. . .	96.8	3.2	»	4.9	65.8	29.3	»
1654–55. . .	96.0	4.0	»	7.7	58.7	33.6	»
1655–56. . .	100.–	–	»	12.5	62.5	25.0	»
1656–57. . .	95.3	4.7	»	3.3	72.1	24.6	»
1657–58. . .	94.4	5.6	»	6.0	63.1	30.9	»
1658–59. . .	96.3	3.7	»	9.0	60.0	31.0	»

Segue TAVOLA III.

Percentuali dei Laureati distinti per luogo d'origine.

ANNI ACCADEMICI	% Nazionali	% Esteri	TOTALE	% Italia Settentr.	% Italia Centrale	% Italia Meridion.	TOTALE
1659–60. . .	97.4	2.6	100.–	9.4	57.7	32.9	100.–
1660–61. . .	94.3	5.7	»	7.8	61.7	30.5	»
1661–62. . .	99.1	0.9	»	3.8	64.1	32.1	»
1662–63. . .	98.4	1.6	»	6.3	61.2	32.5	»
1663–64. . .	96.6	3.4	»	9.0	60.4	30.6	»
1664–65. . .	95.9	4.1	»	4.3	59.0	36.7	»
1665–66. . .	94.4	5.6	»	4.2	62.7	33.1	»
1666–67. . .	96.6	3.4	»	8.8	59.6	31.6	»
1667–68. . .	96.1	3.9	»	5.7	62.3	32.0	»
1668–69. . .	96.6	3.4	»	3.5	66.4	30.1	»
1669–70. . .	93.1	6.9	»	8.2	61.2	30.6	»
1670–71. . .	96.9	3.1	»	8.0	58.7	33.3	»
1671–72. . .	91.9	8.1	»	7.9	60.5	31.6	»
1672–73. . .	94.2	5.8	»	4.4	63.2	32.4	»
1673–74. . .	98.6	1.4	»	2.9	61.4	35.7	»
1674–75. . .	87.0	13.0	»	9.2	57.5	33.3	»
1675–76. . .	88.9	11.1	»	5.0	58.7	36.3	»
1676–77. . .	91.6	8.4	»	8.3	60.5	31.2	»
1677–78. . .	91.5	8.5	»	5.6	62.0	32.4	»
1678–79. . .	96.3	3.7	»	9.2	55.7	35.1	»
1679–80. . .	93.0	7.0	»	9.2	63.3	27.5	»
1680–81. . .	86.0	14.0	»	6.5	62.6	30.9	»
1681–82. . .	88.5	11.5	»	2.6	61.2	36.2	»
1682–83. . .	92.7	7.3	»	4.9	61.8	33.3	»

Segue TAVOLA III.

Percentuali dei Laureati distinti per luogo d'origine.

ANNI ACCADEMICI	% Nazionali	% Esteri	TOTALE	% Italia Settentr.	% Italia Centrale	% Italia Meridion.	TOTALE
1683–84. . .	93.9	6.1	100.–	3.3	60.9	35.8	100.–
1684–85. . .	83.5	16.5	»	4.9	65.4	29.7	»
1685–86. . .	85.2	14.8	»	9.1	63.6	27.3	»
1686–87. . .	83.2	16.8	»	4.0	63.6	32.4	»
1687–88. . .	87.4	12.6	»	5.9	61.1	33.0	»
1688–89. . .	83.8	16.2	»	–	68.4	31.6	»
1689–90. . .							
1690–91. . .							
1691–92. . .							
1692–93. . .							
1693–94. . .							
1694–95. . .	Mancano i registri con i dati						
1695–96. . .							
1696–97. . .							
1697–98. . .							
1698–99. . .							
1699–1700. .	85.2	14.8	100.–	9.9	63.6	26.5	100.–
1700–01. . .	85.6	14.4	»	7.2	64.8	28.0	»
1701–02. . .	94.2	5.8	»	5.1	70.2	24.7	»
1702–03. . .	94.7	5.3	»	2.8	69.0	28.2	»
1703–04. . .	96.5	3.5	»	7.3	61.5	31.2	»
1704–05. . .	95.4	4.6	»	5.8	60.6	33.6	»
1705–06. . .	95.6	4.4	»	3.4	63.6	33.0	»

Segue TAVOLA III.

Percentuali dei Laureati distinti per luogo d'origine.

ANNI ACCADEMICI	% Nazionali	% Esteri	TOTALE	% Italia Settentr.	% Italia Centrale	% Italia Meridion.	TOTALE
1706–07. . .	90.9	9.1	100.–	8.7	65.0	26.3	100.–
1707–08. . .	93.5	6.4	»	5.2	63.8	31.0	»
1708–09. . .	91.9	8.1	»	5.9	61.8	32.3	»
1709–10. . .	98.7	1.3	»	9.3	65.3	25.4	»
1710–11. . .	94.5	5.5	»	7.0	62.8	30.2	»
1711–12. . .	98.0	2.0	»	9.2	63.3	27.5	»
1712–13. . .	97.3	2.7	»	2.8	66.2	31.0	»
1713–14. . .	94.0	6.0	»	4.3	72.3	23.4	»
1714–15. . .	99.1	0.9	»	6.9	55.4	27.7	»
1715–16. . .	96.4	3.6	»	5.7	65.1	29.2	»
1716–17. . .	92.5	7.5	»	6.1	64.6	29.3	»
1717–18. . .	95.9	4.1	»	5.6	69.0	25.4	»
1718–19. . .	93.9	6.1	»	4.8	67.7	27.5	»
1719–20. . .	96.7	3.3	»	9.2	66.7	24.1	»
1720–21. . .	90.6	9.4	»	2.1	64.6	33.3	»
1721–22. . .	97.1	2.9	»	10.3	63.2	26.5	»
1722–23. . .	89.0	11.0	»	4.4	71.1	24.5	»
1723–24. . .	97.9	2.1	»	8.5	63.8	27.7	»
1724–25. . .	94.0	6.0	»	8.6	62.1	29.3	»
1725–26. . .	92.7	7.3	»	2.0	72.5	25.5	»
1726–27. . .	96.4	3.6	»	–	70.4	29.6	»
1727–28. . .	90.2	9.8	»	7.3	65.4	27.3	»
1728–29. . .	89.4	10.6	»	3.4	71.2	25.4	»

II.

Parte del " Risorgimento ,,

(1813-1869)

TAVOLA IV.

Totali parziali e generali della popolazione studentesca (1813-1869).

ANNI ACCADEMICI	Teologia	Giurisprudenza	Med.-Chir. e Veterinaria	Filosofico Matematica	Farmacia	Filologia e Lingue	TOTALE GENERALE
1813–14	7	109	60	38	–	12	226
1814–15	6	112	64	41	–	16	239
1815–16	9	123	59	39	–	14	244
1816–17	8	137	63	42	–	11	261
1817–18	6	132	69	37	–	17	261
1818–19	7	133	63	41	–	13	257
1819–20	11	128	68	44	–	11	262
1820–21	8	152	73	39	–	21	293
1821–22	9	148	77	36	–	13	283
1822–23	6	144	64	38	–	11	263
1823–24	7	164	75	38	–	16	300
1824–25	9	143	43	23	–	17	235
1825–26	11	158	49	34	–	13	265
1826–27	8	171	57	46	–	15	297
1827–28	7	184	61	54	–	13	319
1828–29	12	163	98	48	–	11	332
1829–30	11	172	86	64	-	12	345
1830–31	9	187	104	71	–	16	387
1831–32	8	191	111	66	–	14	390
1832–33	6	183	99	53	–	19	360
1833–34	7	194	114	77	5	17	414
1834–35	13	179	107	94	7	14	414
1835–36	11	185	119	82	9	11	417
1836–37	11	199	121	73	6	13	423
1837–38	9	190	105	99	12	21	436
1838–39	8	182	127	113	11	20	461
1839–40	8	177	138	127	8	18	476
1840–41	7	193	128	119	9	15	471

Segue TAVOLA IV.

Totali parziali e generali della popolazione studentesca (1813-1869).

ANNI ACCADEMICI	Teologia	Giurisprudenza	Med.-Chir. e Veterinaria	Filosofico Matematica	Farmacia	Filologia e Lingue	TOTALE GENERALE
1841–42	13	198	133	111	7	11	473
1842–43	11	187	141	107	11	12	469
1843–44	9	193	127	108	14	12	463
1844–45	7	199	152	113	17	11	499
1845–46	12	211	146	120	13	17	519
1846–47	10	184	139	132	19	14	498
1847–48	7	181	148	99	15	16	466
1848–49	8	184	139	98	11	15	455
1849–50	7	163	137	99	12	13	431
1850–51	4	166	131	88	16	11	416
1851–52	7	151	124	86	18	12	398
1852–53	9	146	114	63	17	14	363
1853–54	10	151	133	65	15	13	387
1854–55	12	160	143	71	14	18	418
1855–56	14	198	139	74	21	17	463
1856–57	11	197	160	93	19	16	496
1857–58	13	203	163	102	19	21	521
1858–59	17	221	166	125	16	22	567
1859–60	14	248	183	139	13	19	616
1860–61	11	276	177	143	15	13	635
1861–62	15	269	201	171	11	16	683
1862–63	13	286	213	158	21	18	709
1863–64	11	292	225	163	18	14	723
1864–65	9	311	247	167	27	17	777
1865–66	16	367	274	159	13	19	848
1866–67	17	386	278	187	24	21	913
1867–68	19	409	303	199	29	25	984
1868–69	21	407	354	173	38	28	1021

TAVOLA V.

Gli studenti distinti per luogo d'origine (1813-1869).

ANNI ACCADEMICI	Italia Settentr.	Italia Centrale extra i laziali	Laziali	Italia Meridionale	TOTALE DEI NAZIONALI	Austria	Belgio	Francia	Inghilterra	S. Marino	Polonia	Spagna	Svizzera	TOTALE ESTERI	TOTALE GENERALE
1813–14 . .	18	44	137	11	210	–	–	14	–	1	–	1	–	16	226
1814–15 . .	11	58	151	8	228	–	–	7	–	1	–	3	–	11	239
1815–16 . .	9	54	163	11	237	–	–	4	–	–	–	1	2	7	244
1816–17 . .	14	63	169	6	252	1	–	5	–	1	–	–	2	9	261
1817–18 . .	8	69	168	8	253	–	–	4	–	1	–	2	1	8	261
1818–19 . .	11	73	154	13	251	1	–	3	–	–	–	1	1	6	257
1819–20 . .	11	74	161	9	255	–	–	2	–	1	1	2	1	7	262
1820–21 . .	16	83	173	15	287	1	–	3	–	–	–	1	1	6	293
1821–22 . .	15	80	167	12	274	–	–	5	–	1	–	2	1	9	283
1822–23 . .	12	74	158	8	252	1	–	6	–	–	1	2	1	11	263
1823–24 . .	13	79	191	9	292	–	–	4	–	–	–	1	3	8	300
1824–25 . .	17	97	95	13	222	2	–	8	–	–	1	2	–	13	235
1825–26 . .	14	92	137	14	257	–	–	4	–	–	–	1	3	8	265
1826–27 . .	16	62	199	11	288	1	–	5	–	–	1	–	2	9	297
1827–28 . .	19	63	213	14	308	1	–	6	–	–	3	–	1	11	319
1828–29 . .	11	88	217	9	325	–	1	3	–	1	–	2	–	7	332
1829–30 . .	13	100	212	7	332	–	1	–	1	2	2	5	2	13	345
1830–31 . .	18	113	233	14	378	–	–	5	–	1	–	3	–	9	387
1831–32 . .	21	107	237	17	382	2	–	3	–	1	–	2	–	8	390
1832–33 . .	16	72	241	22	351	–	1	4	–	2	–	–	2	9	360
1833–34 . .	19	106	264	17	406	–	2	3	1	–	–	2	–	8	414
1834–35 . .	24	110	255	19	408	1	–	2	–	–	1	–	2	6	414
1835–36 . .	21	107	263	18	409	1	–	3	–	1	–	1	2	8	417
1836–37 . .	18	115	267	16	416	–	–	4	–	3	–	–	–	7	423
1837–38 . .	16	124	272	15	427	1	–	5	–	–	1	–	2	9	436
1838–39 . .	25	122	284	19	450	–	1	4	1	–	3	2	–	11	461
1839–40 . .	24	144	277	18	463	1	–	6	–	1	–	3	2	13	476
1840–41 . .	22	131	291	17	461	–	1	3	–	2	2	–	2	10	471

Segue TAVOLA V.

Gli studenti distinti per luogo d'origine (1813-1869).

ANNI ACCADEMICI	Italia Settentr.	Italia Centrale extra i laziali	Laziali	Italia Meridionale	TOTALE DEI NAZIONALI	Austria	Belgio	Francia	Inghilterra	S. Marino	Polonia	Spagna	Svizzera	TOTALE ESTERI	TOTALE GENERALE
1841-42 . .	19	130	296	19	464	1	–	6	–	–	–	2	–	9	473
1842-43 . .	21	135	286	16	458	–	2	7	–	1	–	1	–	11	469
1843-44 . .	21	115	299	14	449	–	–	9	1	2	–	1	1	14	463
1844-45 . .	28	148	295	21	492	–	–	5	–	–	1	1	–	7	499
1845-46 . .	32	144	312	23	511	–	1	4	–	1	2	–	–	8	519
1846-47 . .	26	125	319	19	489	–	–	5	1	–	–	2	1	9	498
1847-48 . .	25	97	322	16	460	–	–	3	1	–	1	–	1	6	466
1848-49 . .	22	78	333	14	447	1	–	4	–	1	–	–	2	8	455
1849-50 . .	19	93	299	13	424	–	–	–	–	–	–	5	2	7	431
1850-51 . .	16	97	281	11	405	–	–	7	1	–	–	–	3	11	416
1851-52 . .	13	108	259	9	389	–	1	4	–	1	–	3	–	9	398
1852-53 . .	15	72	257	11	355	1	–	3	–	1	1	–	2	8	363
1853-54 . .	17	88	261	12	378	1	–	–	1	–	–	4	3	9	387
1854-55 . .	19	113	264	15	411	–	–	3	–	–	1	3	–	7	418
1855-56 . .	22	143	275	17	457	–	1	2	–	1	–	1	1	6	463
1856-57 . .	26	145	297	22	490	1	–	–	–	–	1	4	–	6	496
1857-58 . .	28	126	324	36	514	–	–	3	–	–	–	3	1	7	521
1858-59 . .	32	160	328	41	561	1	–	2	–	1	–	1	1	6	567
1859-60 . .	37	188	343	39	607	–	1	4	–	1	–	3	–	9	616
1860-61 . .	38	179	366	44	627	–	–	5	–	2	–	–	1	8	635
1861-62 . .	41	199	391	46	677	–	–	3	–	1	–	2	–	6	683
1862-63 . .	43	193	418	50	704	–	–	2	1	–	–	2	–	5	709
1863-64 . .	44	175	437	63	719	2	–	–	–	–	–	–	2	4	723
1864-65 . .	47	197	469	58	771	–	–	5	–	1	–	–	–	6	777
1865-66 . .	55	208	512	66	841	–	1	3	–	1	–	–	2	7	848
1866-67 . .	67	213	549	77	906	1	–	2	1	–	–	3	–	7	913
1867-68 . .	76	219	599	85	979	1	–	3	–	–	–	–	1	5	984
1868-69 . .	82	175	658	103	1018	–	–	2	–	–	–	–	1	3	1021

TAVOLA VI.

Percentuali degli studenti secondo le Facoltà (1813-1869).

ANNI ACCADEMICI	% Teologia	% Giurisprudenza	% Medicina e Chirurgia	% Filosofico Matematico	% Farmacia	% Filologia e Lingue	TOTALE
1813–14	3.1	48.2	26.5	16.8	–	5.4	100.–
1814–15	2.5	46.9	26.8	17.1	–	6.7	»
1815–16	3.6	50.4	24.2	16.1	–	5.7	»
1816–17	3.1	52.5	24.1	16.1	–	4.2	»
1817–18	2.3	50.6	26.4	14.2	–	6.5	»
1818–19	2.7	51.7	24.5	15.9	–	5.2	»
1819–20	4.2	48.9	25.9	16.8	–	4.2	»
1820–21	2.7	51.9	24.9	13.3	–	7.2	»
1821–22	3.2	52.3	27.2	12.7	–	4.6	»
1822–23	2.3	54.8	24.3	14.4	–	4.2	»
1823–24	2.3	54.7	25.0	12.7	–	5.3	»
1824–25	3.8	60.8	18.3	9.8	–	7.3	»
1825–26	4.1	59.6	18.5	12.8	–	5.0	»
1826–27	2.7	57.6	19.2	15.5	–	5.0	»
1827–28	2.2	57.7	19.1	16.9	–	4.2	»
1828–29	3.6	49.2	29.5	14.4	–	3.3	»
1829–30	3.2	49.8	24.9	18.6	–	3.5	»
1830–31	2.3	48.3	26.9	18.3	–	4.1	»
1831–32	2.0	49.0	28.5	16.9	–	3.6	»
1832–33	1.7	50.8	27.5	14.7	–	5.3	»
1833–34	1.7	46.9	27.5	18.6	1.2	4.1	»
1834–35	3.1	43.3	25.8	22.7	1.7	3.4	»
1835–36	2.6	44.4	28.5	19.7	2.2	2.6	»
1836–37	2.6	47.0	28.6	17.3	1.4	3.1	»
1837–38	2.1	43.6	24.1	22.7	2.7	4.8	»
1838–39	1.7	39.6	27.5	24.5	2.4	4.3	»
1839–40	1.7	37.2	28.9	26.7	1.7	3.8	»
1840–41	1.5	41.0	27.2	25.3	1.8	3.2	»

Segue TAVOLA VI.

Percentuali degli studenti secondo la Facoltà (1813-1869).

ANNI ACCADEMICI	% Teologia	% Giurisprudenza	% Medicina e Chirurgia	% Filosofico Matematico	% Farmacia	% Filologia e Lingue	TOTALE
1841–42	2.7	41.9	28.1	23.5	1.5	2.3	100.0
1842–43	2.3	39.9	30.2	22.8	2.3	2.5	»
1843–44	1.9	41.7	27.4	23.3	3.0	2.6	»
1844–45	1.4	39.9	30.5	22.6	3.4	2.2	»
1845–46	2.3	40.7	28.1	23.1	2.5	3.3	»
1846–47	2.0	36.9	27.9	26.6	3.8	2.8	»
1847–48	1.5	38.9	31.8	21.2	3.2	3.4	»
1848–49	1.8	40.4	30.6	21.5	2.4	3.3	»
1849–50	1.6	37.8	31.8	23.0	2.8	3.0	»
1850–51	0.9	40.1	31.5	21.1	3.8	2.6	»
1851–52	1.8	37.9	31.2	21.6	4.5	3.0	»
1852–53	2.5	40.2	31.4	17.3	4.7	3.9	»
1853–54	2.6	39.0	34.3	16.8	3.9	3.4	»
1854–55	2.9	38.3	34.2	17.0	3.3	4.3	»
1855–56	3.0	42.8	30.0	16.0	4.5	3.7	»
1356–57	2.3	39.8	32.0	18.7	3.8	3.2	»
1857–58	2.5	39.0	31.3	19.6	3.6	4.0	»
1858–59	3.0	39.0	29.3	22.0	2.8	3.9	»
1859–60	2.3	40.4	29.7	22.5	2.1	3.1	»
1860–61	1.7	43.5	27.9	22.5	2.4	2.0	»
1861–62	2.2	39.3	29.4	25.1	1.7	2.3	»
1862–63	1.8	40.3	30.0	22.3	3.0	2.5	»
1863–64	1.5	40.4	31.2	22.5	2.5	1.9	»
1864–65	1.2	40.0	31.7	21.4	3.5	2.2	»
1865–66	1.9	43.4	32.3	18.7	1.5	2.2	»
1866–67	1.9	42.3	30.4	20.5	2.6	2.3	»
1867–68	1.9	41.7	30.8	20.2	2.9	2.5	»
1868–69	2.1	39.9	34.7	16.9	3.7	2.7	»

Tavola VII.

Percentuali degli studenti per luogo d'origine (1813-1869).

Anni Accademici	% Nazionali	% Esteri	Totale	% Italia Settentrionale	% Italia Centrale	% Italia Meridionale	Totale
1813–14	92.9	7.1	100.–	8.6	86.2	5.2	100.–
1814–15	95.4	4.6	»	4.8	91.7	3.5	»
1815–16	97.1	2.9	»	3.8	91.6	4.6	»
1816–17	96.5	3.4	»	5.5	92.1	2.4	»
1817–18	96.9	3.1	»	3.2	93.7	3.1	»
1818–19	97.7	2.3	»	4.4	90.4	5.2	»
1819–20	97.3	2.7	»	4.3	92.2	3.6	»
1820–21	97.9	2.1	»	5.6	89.2	5.2	»
1821–22	96.8	3.2	»	5.5	90.1	4.4	»
1822–23	95.8	4.2	»	4.8	92.0	3.2	»
1823–24	97.3	2.7	»	4.4	92.5	3.1	»
1824–25	94.2	5.8	»	8.0	85.9	6.1	»
1825–26	96.9	3.1	»	5.4	89.2	5.4	»
1826–27	97.0	3.0	»	5.5	90.7	3.8	»
1827–28	96.5	3.5	»	6.1	89.4	4.5	»
1828–29	97.9	2.1	»	3.4	93.8	2.8	»
1829–30	96.2	3.8	»	3.9	94.0	2.1	»
1830–31	97.6	2.4	»	4.8	91.5	3.7	»
1831–32	97.9	2.1	»	5.5	90.0	4.5	»
1832–33	97.5	2.5	»	4.5	89.2	6.3	»
1833–34	98.5	1.5	»	4.6	91.2	4.2	»
1834–35	98.5	1.5	»	5.9	89.5	4.6	»
1835–36	98.1	1.9	»	5.1	90.5	4.4	»
1836–37	98.3	1.7	»	4.3	91.9	3.8	»
1837–38	97.9	2.1	»	3.7	92.8	3.5	»
1838–39	97.6	2.4	»	5.5	90.3	4.2	»
1839–40	97.3	2.7	»	5.2	90.9	3.9	»
1840–41	97.9	2.1	»	4.8	91.5	3.7	»

Segue TAVOLA VII.

Percentuali degli studenti per luogo d'origine (1813-1869).

ANNI ACCADEMICI	% Nazionali	% Esteri	TOTALE	% Italia Settentrionale	% Italia Centrale	% Italia Meridionale	TOTALE
1841–42	98.1	1.9	100.–	4.1	91.8	4.1	100.–
1842–43	97.6	2.4	»	4.6	91.9	3.5	»
1843–44	97.0	3.0	»	4.7	92.2	3.1	»
1844–45	98.6	1.4	»	5.7	90.0	4.3	»
1845–46	98.4	1.6	»	6.3	89.2	4.5	»
1846–47	98.2	1.8	»	5.3	90.8	3.9	»
1847–48	98.7	1.3	»	5.4	91.1	3.5	»
1848–49	98.2	1.8	»	4.9	92.0	3.1	»
1849–50	98.4	1.6	»	4.5	92.4	3.1	»
1850–51	97.4	2.6	»	3.9	93.4	2.7	»
1851–52	97.7	2.3	»	3.3	94.4	2.3	»
1852–53	97.8	2.2	»	4.2	92.7	3.1	»
1853–54	97.7	2.3	»	4.5	92.3	3.2	»
1854–55	98.3	1.7	»	4.6	91.7	3.7	»
1855–56	98.7	1.3	»	4.8	91.5	3.7	»
1856–57	98.8	1.2	»	5.3	90.2	4.5	»
1857–58	98.6	1.4	»	5.4	87.6	7.0	»
1858–59	98.9	1.1	»	5.7	87.0	7.3	»
1859–60	98.5	1.5	»	6.1	87.5	6.4	»
1860–61	98.7	1.3	»	6.1	86.9	7.0	»
1861–62	99.1	0.9	»	6.1	87.1	6.8	»
1862–63	99.3	0.7	»	6.1	86.8	7.1	»
1863–64	99.4	0.6	»	6.1	85.1	8.8	»
1864–65	99.2	0.8	»	6.1	86.4	7.5	»
1865–66	99.2	0.8	»	6.5	85.7	7.8	»
1866–67	99.2	0.8	»	7.4	84.1	8.5	»
1867–68	99.5	0.5	»	7.8	83.5	8.7	»
1868–69	99.7	0.3	»	8.0	81.9	10.1	»

III.

Parte Moderna

(1870-1931)

Tavola VIII.

Totali parziali e generali degli studenti [1] *secondo le Facoltà (1870-1931).*

Anni Accademici	Lettere e Filosofia	Giurisprudenza	Scienze Fis. Chim. Mat. Natur. Biennio d'Ingegn.	Medicina e Chirurgia	Chimica-Farmacia e Farmacia	Corso di Ostetricia	Totali degli		Totale Generale degli	
							Iscritti	Uditori	Studenti	Di cui esteri
1869–70	29	359	223	301	38	–	950	–	950	–
1870–71	2	237	182	351	41	–	813	–	813	–
1871–72	4	236	151	373	32	11	807	3	810	–
1872–73	11	173	106	236	20	8	554	2	556	–
1873–74	19	151	103	238	19	11	541	1	542	–
1874–75	16	138	121	196	33	18	522	–	522	–
1875–76	13	164	123	177	26	16	519	–	519	–
1876–77	16	205	132	187	32	21	593	1	594	2
1877–78	23	273	129	163	32	27	647	29	676	3
1878–79	27	295	128	168	26	18	662	37	699	2
1879–80	28	342	145	182	28	18	743	84	827	5
1880–81	33	386	129	199	39	13	799	47	846	6
1881–82	38	454	156	249	30	18	945	49	994	8
1882–83	44	444	177	243	50	22	980	63	1043	10
1883–84	57	481	167	301	49	35	1090	48	1138	9
1884–85	64	519	181	347	60	35	1206	86	1292	13
1885–86	61	545	228	395	46	38	1313	31	1344	11
1886–87	91	545	247	400	73	39	1395	21	1416	10
1887–88	93	556	243	389	83	44	1408	35	1443	13
1888–89	93	572	270	403	74	45	1457	81	1538	17
1889–90	99	556	267	409	85	67	1483	91	1574	36
1890–91	115	616	280	441	70	76	1598	70	1668	23
1891–92	134	598	291	442	52	77	1594	43	1637	18
1892–93	145	658	345	469	58	76	1751	46	1797	19
1893–94	157	721	340	513	66	89	1886	37	1923	15
1894–95	166	793	394	598	97	90	2138	72	2210	21
1895–96	185	855	420	607	107	85	2259	60	2319	26
1896–97	185	893	408	638	129	110	2363	64	2427	23
1897–98	199	919	385	649	140	106	2398	49	2447	21
1898–99	245	966	375	652	179	84	2501	56	2557	24
1899–1900	265	1029	432	668	171	93	2658	50	2708	30
1900–01	317	1137	369	618	166	43	2650	29	2679	27
1901–02	274	1224	359	661	180	87	2785	16	2801	31

(1) Nelle cifre degli studenti non sono compresi gli uditori.

Segue TAVOLA VIII.

Totali parziali e generali degli studenti [1] *secondo le Facoltà (1870-1931).*

ANNI ACCADEMICI	Lettere e Filosofia	Giurisprud. e Scienze Polit. e Scuola di Statistica	Scienze Fis. Chim. Mat. Natur. Biennio d'Ingegn.	Medicina e Chirurgia	Chimica-Farmacia e Farmacia	Corso di Ostetricia	Totali degli		TOTALE GENERALE DEGLI	
							Iscritti	Uditori	Studenti	Di cui ESTERI
1902–03	253	1358	367	590	182	90	2840	13	2853	30
1903–04	251	1179	340	525	158	90	2543	65	2608	33
1904–05	235	1182	373	554	162	87	2593	–	2593	39
1905–06	230	1275	357	544	147	91	2644	–	2644	37
1906–07	229	1359	332	553	154	95	2722	–	2722	41
1907–08	210	1492	398	571	127	93	2891	–	2891	46
1908–09	210	1516	487	579	92	86	2970	84	3054	60
1909–10	229	1508	520	578	102	80	3017	48	3065	60
1910–11	253	1470	566	667	76	84	3116	54	3170	43
1911–12	301	1430	590	654	95	89	3159	66	3225	54
1912–13	304	1428	654	714	94	101	3295	77	3372	67
1913–14 [2]	340	1438	792	740	94	87	3491	45	3536	82
1914–15	395	1391	1348	764	126	93	4117	36	4153	–
1915–16	419	1245	1592	852	106	96	4310	24	4334	–
1916–17	495	1224	1238	809	92	101	3959	33	3992	–
1917–18	531	1206	1066	1108	92	88	4091	20	4111	–
1918–19	573	1440	1308	1247	122	80	4770	22	4792	63
1919–20	693	1734	1340	1390	140	89	5386	40	5426	67
1920–21	674	1637	1339	1847	283	93	5873	73	5946	95
1921–22	581	1458	1430	1908	237	96	5710	86	5896	104
1922–23	520	1493	1484	1662	287	132	5578	25	5603	90
1923–24	447	1560	1214	1533	279	87	5120	23	5143	127
1924–25	452	1477	1044	1341	253	29	4596	21	4617	132
1925–26	438	1790	896	1322	248	22	4716	19	4735	167
1926–27	424	1763	844	1299	235	28	4593	33	4626	213
1927–28	458	1841	731	1288	243	35	4596	20	4616	209
1928–29	495	[3] 2224	[4] 694	1444	271	65	5193	21	5214	113
1929–30	498	2282	707	1459	266	63	5275	37	5312	197
1930–31	539	2165	823	1861	227	83	5698	60	5758	237

(1) Nelle cifre degli studenti non sono compresi gli uditori.
(2) Dal 1913-14 al 1930-31 gli uditori non sono stati dist'nti per facoltà.
(3) Nella cifra della facoltà di Giurispr. sono compresi gli 8 studenti di Statistica.
(4) Nella cifra della facoltà di Scienze Fisico-Mat. Nat. sono compresi gli studenti in Scienze Statistiche e Attuariali.

TAVOLA IX.

Totali parziali e generali dei laureati distinti per Facoltà (1870-1930).

ANNI ACCADEMICI	Lettere e Filosofia	Scienze Politiche	Giurisprudenza	Scienze Fis. Chim. Mat. e Naturali	Medicina e Chirurgia	Chimica-Farmacia e Farmacia	Corso di Ostetricia	Flebotomia e Odontalgia	TOTALE GENERALE DEI	
									Laureati	Di cui ESTERI
1869–70	3	–	44	38	68	5	–	–	158	–
1870–71	1	–	31	26	72	6	–	–	136	–
1871–72	1	–	28	17	69	4	–	1	120	–
1872–73	1	–	17	11	53	2	2	–	86	–
1873–74	1	–	12	8	51	1	2	–	75	–
1874–75	–	–	9	16	38	5	4	1	73	–
1875–76	1	–	26	14	33	4	6	1	85	–
1876–77	3	–	32	25	47	6	8	1	122	1
1877–78	4	–	46	9	33	9	28	2	131	1
1878–79	2	–	53	20	30	4	11	4	124	–
1879-80	7	–	71	14	37	6	–	4	139	1
1880–81	7	–	71	28	26	14	–	4	150	2
1881–82	8	–	74	20	42	7	–	4	155	2
1882–83	2	–	88	16	24	5	6	9	150	3
1883–84	11	–	81	22	43	7	7	5	176	–
1884–85	9	–	96	18	51	10	13	3	200	1
1885–86	14	–	111	15	51	7	15	3	216	3
1886–87	21	–	107	24	58	9	13	2	234	1
1887–88	13	–	107	14	45	15	17	3	214	1
1888–89	9	–	123	31	75	8	11	4	261	1
1889–90	17	–	100	40	58	6	26	7	254	1
1890–91	15	–	119	26	58	7	31	10	266	4
1891–92	24	–	117	30	56	10	35	–	272	2
1892–93	21	–	145	44	74	9	29	–	322	5
1893–94	30	–	142	46	56	8	36	–	318	2
1894–95	23	–	131	44	77	9	44	–	328	2
1895–96	34	–	153	67	86	8	38	–	386	4
1896–97	44	–	171	50	90	8	33	–	396	5
1897–98	48	–	171	68	89	14	54	–	444	4
1898–99	45	–	159	41	87	20	37	–	389	5
1899–1900	72	–	174	69	128	25	45	–	513	6
1900–01	87	–	170	67	117	18	38	–	497	5

Segue TAVOLA IX.

Totali parziali e generali dei laureati distinti per Facoltà (1870-1930).

ANNI ACCADEMICI	Lettere e Filosofia	Scienze Politiche	Giurisprudenza	Scienze Fis. Chim. Mat. e Naturali	Medicina e Chirurgia	Chimica-Farmacia e Farmacia	Corso di Ostetricia	Flebotonia e Odontalgia	TOTALE GENERALE DEI	
									Laureati	Di cui ESTERI
1901–02	48	–	198	72	93	30	41	–	482	6
1902–03	53	–	196	86	92	14	41	–	482	6
1903–04	74	–	176	74	70	25	38	–	457	7
1904–05	57	–	168	91	72	18	42	–	448	8
1905–06	40	–	188	82	80	19	44	–	453	7
1906–07	48	–	183	90	63	24	39	–	447	8
1907–08	39	–	198	80	65	13	49	–	444	10
1908–09	42	–	172	201	80	24	38	–	557	12
1909–10	33	–	239	87	95	26	41	–	521	11
1910–11	44	–	233	96	60	12	37	–	482	8
1911–12	42	–	250	100	81	19	28	–	520	11
1912–13	44	–	228	106	59	15	56	–	508	15
1913–14	61	–	225	154	90	11	39	–	580	21
1914–15	49	–	153	112	104	21	41	–	480	–
1915–16	29	–	120	66	117	20	45	–	397	–
1916–17	44	–	135	35	19	10	46	–	289	–
1917–18	41	–	126	45	33	15	46	–	306	–
1918–19	79	–	334	91	123	19	30	–	676	13
1919–20	129	–	473	112	194	26	30	–	964	14
1920–21	100	–	357	112	224	15	35	–	843	19
1921–22	88	–	309	89	202	38	40	–	766	21
1922–23	108	–	304	152	288	51	50	–	953	18
1923–24	89	–	260	71	187	37	77	–	721	24
1924–25	95	6	258	80	162	38	12	–	651	29
1925–26	87	13	279	93	307	43	14	–	836	12
1926–27	94	10	378	92	277	55	9	–	915	19
1927–28	93	10	321	73	299	46	9	–	851	26
1928–29	95	17	364	109	294	51	23	–	953	44
1929–30	[1] 123	21	383	[2] 76	261	59	15	–	938	37

(1) Sono compresi i diplomati dei corsi di Perfezionamento.

(2) » » i laureati in Scienze Statistiche e attuariali.

TAVOLA X.

Gli studenti della Facoltà di Scienze Politiche distinti per Anno di Corso.

ANNI ACCADEMICI	I° ANNO	II° ANNO	III° ANNO	IV° ANNO	TOTALE GENERALE DEGLI	
	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Uditori	Studenti (Num. complessivo)
1924–25.	8	6	2	35	–	51
1925–26.	31	18	9	97	–	155
1926–27.	42	36	69	15	–	162
1927–28.	43	51	63	37	–	194
1928–29.	87	77	137	62	–	363
1929–30.	91	76	133	67	–	367
1930–31.	72	77	128	69	–	436

Tavola XI.

Gli studenti della Facoltà di Lettere, Filosofia e Scuole Speciali distinti per Anno di Corso (1870-1931).

Anni Accademici	I° Anno	II° Anno	III° Anno	IV° Anno	Totale Generale degli	
	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Uditori	Studenti (Num. complessivo)
1869–70.	10	7	6	6	–	29
1870–71.	–	–	–	2	–	2
1871–72.	3	–	–	1	–	4
1872–73.	6	3	–	2	–	11
1873–74.	9	5	3	2	–	19
1874–75.	8	5	2	1	–	16
1875–76.	4	4	3	2	–	13
1876–77.	6	3	3	4	1	17
1877–78.	8	6	4	5	–	23
1878–79.	10	6	5	6	2	29
1879–80.	5	7	7	9	1	29
1880–81.	13	4	8	8	5	38
1881–82.	9	11	7	11	3	41
1882–83.	12	13	15	4	6	50
1883–84.	18	9	13	17	1	58
1884–85.	18	20	10	16	3	67
1885–86.	10	16	19	16	1	62
1886–87.	26	19	22	24	–	91
1887–88.	23	24	16	30	1	94
1888–89.	26	16	23	28	30	123
1889–90.	27	22	18	32	14	113
1890–91.	40	19	25	31	18	133
1891–92.	40	30	29	35	14	148
1892–93.	35	34	34	42	11	156
1893–94.	31	29	41	56	16	173
1894–95.	50	31	36	49	27	193
1895–96.	39	45	36	65	24	209
1896–97.	34	43	39	69	21	206
1897–98.	54	32	39	74	27	226
1898–99.	59	65	55	66	34	279
1899–1900.	49	51	74	91	29	294

Segue TAVOLA XI.

Gli studenti della Facoltà di Lettere, Filosofia e Scuole Speciali distinti per Anno di Corso (1870-1931).

ANNI ACCADEMICI	I° ANNO	II° ANNO	III° ANNO	IV° ANNO	TOTALE GENERALE DEGLI	
	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Uditori	Studenti (Num. complessivo)
1900–01.	72	67	63	115	19	336
1901–02.	51	67	70	86	16	290
1902–03.	47	41	63	102	13	266
1903–04.	48	40	49	114	65	316
1904–05.	38	46	40	111	–	235
1905–06.	51	39	48	92	–	230
1906–07.	58	47	45	79	–	229
1907–08.	48	56	45	61	–	210
1908–09.	65	39	50	56	47	257
1909–10.	62	66	51	50	28	257
1910–11.	74	61	63	55	18	271
1911–12.	62	74	83	82	27	328
1912–13.	74	67	85	78	43	347
1913–14.	82	73	97	87	26	366
1914–15.	119	88	94	94	–	395
1915–16.	128	97	97	97	–	419
1916–17.	116	114	144	121	–	495
1917–18.	155	101	149	126	–	531
1918–19.	158	133	131	151	–	573
1919–20.	184	165	163	181	–	693
1920–21.	183	158	156	177	–	674
1921–22.	135	97	167	182	–	581
1922–23.	128	114	132	146	–	520
1923–24.	101	105	132	109	–	447
1924–25.	74	93	156	129	–	452
1925–26.	110	80	117	131	–	438
1926–27.	112	117	96	99	–	424
1927–28.	149	104	113	92	–	458
1928–29.	133	126	125	111	–	495
1929–30.	138	123	128	109	–	498
1930–31.	164	129	116	130	–	539

Tavola XII.

Gli studenti della Facoltà di Giurisprudenza e Scuola di Statistica distinti per Anno di Corso (1870-1931).

Anni Accademici	I° Anno	II° Anno	III° Anno	IV° Anno	Totale Generale degli	
	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Uditori	Studenti (Num. complessivo)
1869–70	125	99	86	49	–	359
1870–71	75	69	58	35	–	237
1871–72	79	67	56	34	–	236
1872–73	59	50	43	21	–	173
1873–74	57	45	32	17	–	151
1874–75	48	39	38	13	–	138
1875–76	53	46	37	30	–	164
1876–77	72	51	48	34	–	205
1877–78	97	74	55	47	4	277
1878–79	81	77	78	59	–	295
1879–80	103	86	79	74	59	401
1880–81	117	104	91	73	–	386
1881–82	131	114	111	98	13	467
1882–83	99	128	110	107	24	468
1883–84	126	113	127	115	25	506
1884–85	125	145	121	128	41	560
1885–86	125	154	141	125	6	551
1886–87	137	121	147	140	5	550
1887–88	141	131	114	170	4	560
1888–89	152	151	116	153	12	584
1889–90	154	140	140	122	22	578
1890–91	162	176	141	137	18	634
1891–92	136	179	152	131	8	606
1892–93	177	138	163	180	10	668
1893–94	212	185	152	172	3	724
1894–95	227	220	179	167	10	803
1895–96	239	218	216	182	12	867
1896–97	256	223	221	193	17	910
1897–98	274	237	212	196	9	928
1898–99	293	243	208	222	11	977
1899–1900	309	284	213	223	5	1034
1900–01	309	322	260	246	7	1144

Segue TAVOLA XII.

Gli studenti della Facoltà di Giurisprudenza e Scuola di Statistica distinti per Anno di Corso (1870-1931).

ANNI ACCADEMICI	I° ANNO	II° ANNO	III° ANNO	IV° ANNO	TOTALE GENERALE DEGLI	
	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Uditori	Studenti (Num. complessivo)
1901–02	316	313	317	278	–	1224
1902–03	383	350	329	296	–	1358
1903–04	350	288	259	282	–	1179
1904–05	370	316	255	241	–	1182
1905–06	396	340	256	283	–	1275
1906–07	425	364	324	246	–	1359
1907–08	405	429	342	316	–	1492
1908–09	415	390	383	328	9	1525
1909–10	384	397	354	373	7	1515
1910–11	419	372	358	321	4	1474
1911–12	364	398	343	325	8	1438
1912–13	389	358	357	324	3	1431
1913–14	413	368	338	319	5	1443
1914–15	408	361	332	290	–	1391
1915–16	323	287	341	294	–	1245
1916–17	262	324	284	354	–	1224
1917–18	352	236	326	296	–	1206
1918–19	351	363	353	373	–	1440
1919–20	534	493	369	338	–	1734
1920–21	510	445	368	314	–	1637
1921–22	340	328	373	417	–	1458
1922–23	467	358	304	364	–	1493
1923–24	382	437	428	313	–	1560
1924–25	350	394	399	283	–	1426
1925–26	408	364	425	438	–	1635
1926–27	485	386	334	396	–	1601
1927–28	482	433	402	330	–	1647
1928–29 (1)	526	482	432	421	–	1861
1929–30	555	490	437	433	–	1915
1930–31	488	471	451	409	–	1819

(1) Nelle cifre del I e II Anno sono compresi gli 8 studenti di Statistica.

Tavola XIII.

Gli studenti della Facoltà di Medicina e Chirurgia distinti per Anno di Corso (1870-1931).

Anni Accademici	I° Anno	II° Anno	III° Anno	IV° Anno	V° Anno	VI° Anno	Totale Generale degli	
	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Uditori	Studenti (Num. complessivo)
1869–70	57	28	24	41	71	80	–	301
1870–71	66	37	29	54	77	88	–	351
1871–72	74	46	36	59	75	83	–	373
1872-73	45	31	20	34	46	60	–	236
1873–74	44	36	22	36	43	57	–	238
1874–75	35	32	29	31	27	42	–	196
1875–76	31	29	26	27	24	40	–	177
1876–77	35	20	29	25	28	50	–	187
1877–78	26	31	21	25	24	36	19	182
1878–79	38	21	27	24	23	35	23	191
1879–80	39	35	22	26	21	39	15	197
1880–81	48	36	33	23	30	29	24	223
1881–82	61	47	38	31	24	48	19	268
1882–83	41	64	45	38	32	23	9	252
1883–84	53	52	58	43	49	46	4	305
1884–85	61	69	53	60	51	53	18	365
1885–86	60	79	71	62	63	60	3	398
1886–87	63	64	79	71	57	66	4	404
1887–88	50	58	65	69	71	67	3	392
1888–89	47	70	54	59	73	100	6	409
1889–90	65	47	71	59	61	106	7	416
1890–91	81	72	46	78	60	104	7	448
1891–92	76	81	68	47	80	90	9	451
1892–93	97	66	77	73	54	102	5	474
1893–94	85	89	69	81	88	101	8	521
1894–95	115	83	89	81	102	128	3	601
1895–96	110	109	83	92	82	131	5	612
1896–97	121	102	91	99	87	138	9	647
1897–98	108	91	84	93	104	169	–	649
1898-99	62	89	84	104	128	185	–	652
1899–1900	84	60	89	98	119	218	–	668

Segue TAVOLA XIII.

Gli studenti della Facoltà di Medicina e Chirurgia distinti per Anno di Corso (1870-1931).

ANNI ACCADEMICI	I° ANNO	II° ANNO	III° ANNO	IV° ANNO	V° ANNO	VI° ANNO	TOTALE GENERALE DEGLI	
	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Uditori	Studenti (Num. complessivo)
1900–01	80	75	50	98	103	212	–	618
1901–02	65	77	74	56	100	289	–	661
1902–03	72	61	65	81	94	217	–	590
1903–04	77	60	57	82	75	174	–	525
1904–05	83	78	62	58	86	187	–	554
1905–06	65	78	76	65	67	193	–	544
1906–07	83	62	83	84	73	168	–	553
1907–08	67	77	62	87	88	190	–	571
1908–09	87	61	77	61	95	198	23	602
1909–10	78	83	60	84	64	209	12	590
1910–11	103	78	87	65	83	251	28	695
1911–12	117	101	77	93	71	195	29	683
1912–13	94	101	104	84	99	232	27	741
1913–14	151	86	103	107	96	197	12	752
1914–15	173	149	113	87	93	149	–	764
1915–16	197	154	128	84	103	186	–	852
1916–17	210	240	159	117	44	39	–	809
1917–18	258	229	200	153	166	102	–	1108
1918–19	185	260	205	214	172	211	–	1247
1919–20	181	253	213	146	225	372	–	1390
1920–21	223	197	215	231	243	738	–	1847
1921–22	249	191	227	219	300	722	–	1908
1922–23	251	223	180	215	232	561	–	1662
1923–24	253	224	210	179	225	442	–	1533
1924–25	159	205	194	188	157	438	–	1341
1925–26	193	157	187	215	198	372	–	1322
1926–27	299	211	168	205	222	194	–	1299
1927–28	241	217	184	188	215	243	–	1288
1928–29	346	297	214	210	187	190	–	1444
1929–30	346	297	221	212	190	193	–	1459
1930–31	562	419	267	212	208	193	–	1861

Tavola XIV.

Gli studenti della Facoltà di Scienze Fis. Chim. Mat. Nat. e Scienze Statist. Attuar. distinti per Anno di Corso (1870-1931).

Anni Accademici	I° Anno	II° Anno	III° Anno	IV° Anno	Totale Generale degli	
	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Uditori	Studenti (Num. complessivo)
1869–70	84	63	51	45	–	223
1870–71	68	44	38	32	–	182
1871–72	55	38	32	26	–	151
1872–73	35	29	23	19	–	106
1873–74	37	28	24	14	–	103
1874–75	39	34	26	22	–	121
1875–76	43	32	27	21	–	123
1876–77	45	33	28	26	–	132
1877–78	51	38	29	11	5	134
1878–79	49	33	24	22	11	139
1879–80	62	44	23	16	9	154
1880–81	57	43	18	11	14	143
1881–82	71	54	22	9	14	170
1882–83	85	48	27	17	18	195
1883–84	64	67	25	11	16	183
1884–85	90	56	23	12	17	198
1885–86	105	93	21	9	13	241
1886–87	118	82	38	9	7	254
1887–88	99	106	26	12	18	261
1888–89	113	98	39	20	18	288
1889–90	110	100	46	11	31	298
1890–91	121	103	36	20	23	303
1891–92	110	111	53	17	6	297
1892–93	148	125	47	25	15	360
1893–94	158	127	42	13	9	349
1894–95	148	147	66	33	25	419
1895–96	161	146	81	32	15	435
1896–97	158	139	77	34	17	425
1897–98	147	139	76	23	13	398
1898–99	130	140	78	27	11	386
1899–1900	159	147	83	43	16	448

Segue TAVOLA XIV.

Gli studenti della Facoltà di Scienze Fis. Chim. Mat. Nat. e Scienze Statist. Attuar. distinti per Anno di Corso (1870-1931).

ANNI ACCADEMICI	I° ANNO	II° ANNO	III° ANNO	IV° ANNO	TOTALE GENERALE DEGLI	
	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Uditori	Studenti (Num. complessivo)
1900–01	116	131	69	53	3	372
1901–02	114	108	61	76	–	359
1902–03	115	109	65	78	–	367
1903–04	125	137	30	48	–	340
1904–05	122	147	56	48	–	373
1905–06	125	128	47	57	–	357
1906–07	133	124	30	45	–	332
1907–08	195	128	41	34	–	398
1908–09	211	206	33	37	5	492
1909–10	235	221	31	33	1	521
1910–11	226	250	50	40	4	570
1911–12	259	247	58	26	2	592
1912–13	277	242	89	46	3	657
1913–14	321	362	62	49	2	794
1914–15	601	497	198	52	–	1348
1915–16	702	607	227	56	–	1592
1916–17	727	362	83	66	13	1251
1917–18	600	345	65	56	–	1066
1918–19	522	622	82	82	–	1308
1919–20	461	464	222	193	–	1340
1920–21	493	498	197	151	–	1339
1921–22	550	527	187	166	–	1430
1922–23	547	534	184	219	–	1484
1923–24	398	419	210	187	–	1214
1924–25	348	387	156	153	–	1044
1925–26	346	301	113	136	–	896
1926–27	320	318	114	92	–	844
1927–28	225	300	94	112	–	731
1928–29	269	237	111	77	–	694
1929–30	278	241	110	78	–	707
1930–31	348	259	110	106	–	823

Tavola XV.

Gli studenti della Facoltà di Chimica-Farmacia e Farmacia distinti per Anno di Corso (1870-1931).

Anni Accademici	I° Anno	II° Anno	III° Anno	IV° Anno	V° Anno	Totale Generale degli	
	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Uditori	Studenti (Num. complessivo)
1869–70	14	8	9	7	–	–	38
1870–71	17	7	9	8	–	–	41
1871–72	12	6	7	7	–	–	32
1872–73	6	9	3	2	–	–	20
1873–74	4	7	5	3	–	–	19
1874–75	8	11	6	8	–	–	33
1875–76	7	5	8	6	–	–	26
1876–77	11	7	8	6	–	–	32
1877–78	10	8	5	9	–	1	33
1878–79	9	7	6	4	–	1	27
1879–80	11	6	5	6	–	–	28
1880–81	9	9	8	13	–	4	43
1881–82	10	7	5	8	–	–	30
1882–83	18	15	11	6	–	4	54
1883–84	18	9	12	10	–	2	51
1884–85	30	10	7	11	2	–	60
1885–86	15	14	11	5	1	4	50
1886–87	35	11	15	11	1	3	76
1887–88	49	8	8	17	1	4	87
1888–89	42	16	7	9	–	–	74
1889–90	41	18	18	7	1	–	85
1890–91	31	8	12	16	3	–	70
1891–92	21	8	8	15	–	–	52
1892–93	30	11	9	6	2	–	58
1893–94	27	16	12	10	1	–	66
1894–95	49	19	14	12	3	3	100
1895–96	45	27	19	15	1	–	107
1896–97	51	33	24	20	1	–	129
1897–98	53	35	27	22	3	–	140
1898–99	79	43	34	21	2	–	179
1899–1900 . . .	60	47	36	26	2	–	171

Segue TAVOLA XV.

Gli studenti della Facoltà di Chimica-Farmacia e Farmacia distinti per Anno di Corso (1870-1931).

ANNI ACCADEMICI	I° ANNO	II° ANNO	III° ANNO	IV° ANNO	V° ANNO	TOTALE GENERALE DEGLI	
	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Iscritti	Uditori	Studenti (Num. complessivo)
1900–01	50	38	47	29	2	–	166
1901–02	60	34	45	36	5	–	180
1902–03	57	36	43	39	7	–	182
1903–04	44	39	35	32	8	–	158
1904–05	60	33	31	33	5	–	162
1905–06	46	39	28	28	6	–	147
1906–07	51	27	36	34	6	–	154
1907–08	22	29	28	44	4	–	127
1908–09	21	18	18	23	12	–	92
1909–10	26	20	27	24	5	–	102
1910–11	15	21	16	23	1	–	76
1911–12	35	13	26	13	8	–	95
1912–13	40	21	13	16	4	1	95
1913–14	36	14	21	14	9	–	94
1914–15	27	23	49	21	6	–	126
1915–16	20	16	46	14	10	–	106
1916–17	12	32	23	23	2	–	92
1917–18	24	16	27	20	5	–	92
1918–19	30	37	24	26	5	–	122
1919–20	39	37	32	26	6	–	140
1920–21	81	77	66	52	7	–	283
1921–22	62	65	59	46	5	–	237
1922–23	84	49	51	75	28	–	287
1923–24	53	78	44	78	18	–	279
1924–25	54	64	71	58	6	–	253
1925–26	52	48	68	68	12	–	248
1926–27	49	45	58	60	23	–	235
1927–28	61	51	46	64	21	–	243
1928–29	47	65	67	78	14	–	271
1929–30	47	64	57	82	16	–	266
1930–31	56	41	51	67	12	–	227

Tavola XVI.

Gli studenti del Corso di Flebotomia e Ostetricia Minore distinti per Anno di Corso (1870-1931).

Anni Accademici	I° Anno Iscritti	II° Anno Iscritti	III° Anno Iscritti	Totale Generale degli Uditori	Totale Generale degli Studenti (Num. comples.)	Anni Accademici	I° Anno Iscritti	II° Anno Iscritti	III° Anno Iscritti	Totale Generale degli Uditori	Totale Generale degli Studenti (Num. comples.)
1869–70	–	–	–	–	–	1900–01	41	2	–	–	43
1870–71	–	–	–	–	–	1901–02	47	40	–	–	87
1871–72	7	4	–	3	14	1902–03	49	41	–	–	90
1872–73	5	3	–	2	10	1903–04	50	40	–	–	90
1873–74	8	3	–	1	12	1904–05	45	42	–	–	87
1874–75	12	6	–	–	18	1905–06	46	45	–	–	91
1875–76	9	7	–	–	16	1906–07	56	39	–	–	95
1876–77	13	8	–	–	21	1907–08	44	49	–	–	93
1877–78	18	9	–	–	27	1908–09	49	37	–	–	86
1878–79	11	7	–	–	18	1909–10	39	41	–	–	80
1879–80	7	11	–	–	18	1910–11	47	37	–	–	84
1880–81	10	3	–	–	13	1911–12	64	25	–	–	89
1881–82	11	7	–	–	18	1912–13	44	57	–	–	101
1882–83	12	10	–	2	24	1913–14	44	43	–	–	87
1883–84	24	11	–	–	35	1914–15	51	42	–	–	93
1884–85	16	19	–	7	42	1915–16	50	46	–	–	96
1885–86	16	22	–	4	42	1916–17	52	49	–	–	101
1886–87	23	16	–	2	41	1917–18	41	47	–	–	88
1887–88	24	20	–	5	49	1918–19	32	48	–	–	80
1888–89	28	17	–	15	60	1919–20	42	47	–	–	89
1889–90	32	35	–	17	84	1920–21	54	39	–	–	93
1890–91	37	39	–	4	80	1921–22	61	35	–	–	96
1891–92	42	35	–	6	83	1922–23	82	50	–	–	132
1892–93	47	29	–	5	81	1923–24	15	71	–	–	87
1893–94	53	36	–	1	90	1924–25	16	13	–	–	29
1894–95	45	45	–	4	94	1925–26	4	18	–	–	22
1895–96	47	38	–	4	89	1926–27	19	9	–	–	28
1896–97	63	47	–	–	110	1927–28	14	21	–	–	35
1897–98	61	45	–	–	106	1928–29	23	26	16	–	65
1898–99	47	37	–	–	84	1929–30	22	27	14	–	63
1899–1900	48	45	–	–	93	1930–31	33	21	29	–	83

Tavola XVII.

Percentuali degli Studenti distinti per Facoltà (1870-1931).

Anni Accademici	% per Lettere e Filosofia	% per Giurisprudenza e Scienze Politiche	% per Scienze Fis. Chim. Mat. Nat. e Ingegner.	% per Medicina e Chirurgia	% per Clinica-Farmacia e Farmacia	% per Ostetricia	% sui Totali degli Iscritti	% sui Totali degli Uditori	Totale
1869–70	3.0	37.8	23.5	31.7	4.0	–	100.–	–	100.–
1870–71	0.2	29.2	22.4	43.2	5.0	–	100.–	–	»
1871–72	0.5	29.2	18.7	47.2	4.0	1.4	99.6	0.4	»
1872–73	2.0	31.2	19.1	42.6	3.6	1.5	99.6	0.4	»
1873–74	3.5	27.9	14.0	44.1	3.5	2.0	99.8	0.2	»
1874–75	3.1	26.4	23.2	37.5	6.3	3.5	100.–	–	»
1875–76	2.5	31.6	23.7	34.1	5.0	3.1	100.–	–	»
1876–77	2.7	34.6	22.3	31.5	5.4	3.5	99.8	0.2	»
1877–78	3.6	42.2	19.9	25.2	4.9	4.2	95.7	4.3	»
1878–79	4.1	44.6	19.3	25.4	3.9	2.7	95.0	5.0	»
1879–80	3.8	46.0	19.5	24.5	3.8	2.4	89.8	10.2	»
1880–81	4.1	48.3	16.2	24.9	4.9	1.6	94.4	5.6	»
1881–82	4.0	48.0	16.5	26.4	3.2	1.9	95.1	4.9	»
1882–83	4.5	45.3	18.1	24.8	5.1	2.2	94.0	6.0	»
1883–84	5.2	44.2	15.3	27.6	4.5	3.2	95.8	4.2	»
1884–85	5.3	43.0	15.0	28.8	5.0	2.9	93.3	6.7	»
1885–86	4.6	41.5	17.4	30.1	3.5	2.9	97.7	2.3	»
1886–87	6.5	39.1	17.7	28.7	5.2	2.8	98.5	1.5	»
1887–88	6.6	39.5	17.3	27.6	5.9	3.1	97.6	2.4	»
1888–89	6.4	39.3	18.5	27.7	5.1	3.0	94.7	5.3	»
1889–90	6.7	37.5	18.0	27.6	5.7	4.5	94.2	5.8	»
1890–91	7.2	38.5	17.5	27.6	4.4	4.8	95.8	4.2	»
1891–92	8.4	37.5	18.3	27.7	3.3	4.8	97.4	2.6	»
1892–93	8.3	37.6	19.7	26.8	3.3	4.3	97.4	2.6	»
1893–94	8.3	38.3	18.0	27.2	3.5	4.7	98.1	1.9	»
1894–95	7.8	37.1	18.4	28.0	4.5	4.2	96.7	3.3	»
1895–96	8.2	37.8	18.6	29.9	4.7	3.8	97.4	2.6	»
1896–97	7.8	37.8	17.3	27.0	5.5	4.6	97.4	2.6	»
1897–98	8.3	38.3	16.1	27.1	5.8	4.4	98.0	2.0	»
1898–99	9.8	38.6	15.0	26.1	7.2	3.3	97.8	2.2	»
1899–1900 . . .	10.0	38.7	16.3	25.1	6.4	3.5	98.2	1.8	»

Segue TAVOLA XVII.

Percentuali degli Studenti distinti per Facoltà (1870-1931).

ANNA ACCADEMICI	% per Lettere e Filosofia	% per Giurisprudenza e Scienze Politiche	% per Scienze Fis. Chim. Mat. Nat. e Ingegner.	% per Medicina e Chirurgia	% per Chimica-Farmacia e Farmacia	% per Ostetricia	% sui Totali degli		TOTALE
							Iscritti	Uditori	
1900–01	12.0	42.9	13.9	23.3	6.3	1.6	98.9	1.1	100.–
1901–02	9.8	44.0	12.9	23.7	6.5	3.1	99.4	0.6	»
1902–03	8.9	47.8	12.9	20.8	6.4	3.2	95.5	0.5	»
1903–04	11.8	45.3	13.1	20.2	6.1	3.5	99.6	0.4	»
1904–05	9.1	45.5	14.4	21.4	6.2	3.4	100.–	–	»
1905–06	8.7	48.2	13.5	20.6	5.6	3.4	100.–	–	»
1906–07	8.4	49.9	12.2	20.3	5.7	3.5	100.–	–	»
1907–08	7.3	51.6	13.8	19.7	4.4	3.2	100.–	–	»
1908–09	7.1	51.0	16.4	19.5	3.1	2.9	97.2	2.8	»
1909–10	7.6	50.0	17.2	19.2	3.4	2.6	98.4	1.6	»
1910–11	8.1	47.2	18.2	21.4	2.4	2.7	98.3	1.7	»
1911–12	9.5	45.3	18.7	20.7	3.0	2.8	98.0	2.0	»
1912–13	9.2	43.3	19.8	21.7	2.9	3.1	97.7	2.3	»
1913–14	9.7	41.2	22.7	22.2	2.7	2.5	98.7	1.3	»
1914–15	9.6	33.8	32.7	18.6	3.1	2.2	99.1	0.9	»
1915–16	9.7	28.9	36.9	19.8	2.5	2.2	99.4	0.6	»
1916–17	12.5	30.9	31.3	20.4	2.3	2.6	99.2	0.8	»
1917–18	13.0	29.5	26.1	27.1	2.2	2.1	99.5	0.5	»
1918–19	12.0	30.2	27.4	26.1	2.6	1.7	99.5	0.5	»
1919–20	12.9	32.2	24.9	25.8	2.6	1.6	99.3	0.7	»
1920–21	11.5	27.9	22.8	31.4	4.8	1.6	98.8	1.2	»
1921–22	10.0	25.1	24.6	32.8	5.8	1.7	98.5	1.5	»
1922–23	9.3	26.8	26.6	29.8	5.1	2.4	99.6	0.4	»
1923–24	8.7	30.5	23.7	29.9	5.4	1.7	99.6	0.4	»
1924–25	9.8	32.1	22.7	29.2	5.5	0.6	99.5	0.5	»
1925–26	7.3	38.8	19.4	28.6	5.4	0.5	99.6	0.4	»
1926–27	9.2	38.1	18.2	28.1	5.1	0.6	99.3	0.7	»
1927–28	10.0	40.0	15.9	28.0	5.3	0.8	100.0	–	»
1928–29	9.5	42.8	13.5	27.8	5.2	1.2	–	–	»
1929–30	9.4	43.4	13.4	27.6	5.0	1.2	–	–	»
1930–31	–	–	–	–	–	–	–	–	»

Tavola XVIII.

Percentuali dei Laureati distinti per Facoltà (1870-1930).

Anni Accademici	% per Lettere e Filosofia	% per Giurisprudenza e Scienze Politiche	% per Scienze Fis. Chim. Mat. Nat. e Biennio Ing.	% per Medicina e Chirurgia	% per Chimica-Farmacia e Farmacia	% per Ostetricia	% per Flebotomia e Odontolgia	Totale
1869–70	1.9	27.8	24.1	43.0	3.2	–	–	100.–
1870–71	0.7	22.8	19.2	52.9	4.4	–	–	»
1871–72	0.8	22.8	13.8	56.1	3.3	2.4	0.8	»
1872–73	1.2	20.0	12.9	62.3	1.2	2.4	–	»
1873–74	1.3	16.0	10.7	68.0	1.3	2.7	–	»
1874–75	–	12.3	21.9	52.1	6.8	5.5	1.4	»
1875–76	1.2	30.5	16.5	38.8	4.7	7.1	1.2	»
1876–77	2.5	26.2	20.5	38.5	4.9	6.6	0.8	»
1877–78	3.1	35.1	6.9	25.1	6.9	21.4	1.5	»
1878–79	1.6	42.7	16.1	24.3	3.2	8.9	3.2	»
1879–80	5.0	51.1	10.1	26.6	4.3	–	2.9	«
1880–81	4.7	47.3	18.7	17.3	9.3	–	2.7	»
1881–82	5.2	47.7	12.9	27.1	4.5	–	2.6	»
1882–83	1.3	58.7	10.7	16.0	3.3	4.0	6.0	»
1883–84	6.3	46.0	12.5	24.4	4.0	4.0	2.8	»
1884–85	4.5	48.0	9.0	25.5	6.0	6.5	1.5	»
1885–86	6.5	51.4	6.9	23.7	3.2	6.9	1.4	»
1886–87	9.0	45.7	10.3	24.8	3.8	5.6	0.8	»
1887–88	6.1	50.0	6.5	21.2	7.0	7.9	1.4	»
1888–89	3.4	47.2	11.9	28.7	3.1	4.2	1.5	»
1889–90	6.7	39.4	15.7	22.8	2.4	10.2	2.8	»
1890–91	5.6	44.7	9.8	21.8	2.6	11.7	3.8	»
1891–92	8.8	43.0	11.0	20.6	3.7	12.9	–	»
1892–93	6.5	45.0	13.7	23.0	2.8	9.0	–	»
1893–94	9.4	44.7	14.5	17.6	2.5	11.3	–	»
1894–95	7.0	39.9	13.4	23.6	2.7	13.4	–	»
1895–96	8.6	39.7	17.4	22.3	2.1	9.9	–	»
1896–97	11.1	43.3	12.6	22.7	2.0	8.3	–	»
1897–98	10.8	38.5	15.3	20.0	3.2	12.2	–	»
1898–99	11.6	40.9	10.5	22.4	5.1	9.5	–	»
1899–1900	14.0	33.9	13.5	25.0	4.9	8.7	–	»

Segue TAVOLA XVIII.

Percentuali dei Laureati distinti per Facoltà (1870-1930).

ANNI ACCADEMICI	% per Lettere e Filosofia	% per Giurisprudenza e Scienze Politiche	% per Scienze Fis. Chim. Mat. Nat. e Biennio Ing.	% per Medicina e Chirurgia	% per Chimica-Farmacia e Farmacia	% per Ostetricia	% per Flebotomia e Odontolgia	TOTALE
1900–01	17.5	34.2	13.5	23.5	3.6	7.7	–	100.–
1901–02	10.0	41.1	14.9	19.3	6.2	8.5	–	»
1902–03	11.0	40.7	17.8	19.1	2.9	8.5	–	»
1903–04	16.2	38.5	16.2	15.3	5.5	8.3	–	»
1904–05	12.7	37.5	20.3	16.1	4.0	9.4	–	»
1905–06	8.8	41.5	18.1	17.7	4.2	9.7	–	»
1906–07	10.7	40.9	20.2	14.1	5.4	8.7	–	»
1907–08	8.8	44.6	18.0	14.6	2.9	11.0	–	»
1908–09	7.5	30.9	36.1	14.4	4.3	6.8	–	»
1909–10	6.3	45.9	16.7	18.2	5.0	7.9	–	»
1910–11	9.1	48.3	19.9	12.4	2.5	7.8	–	»
1911–12	8.1	48.1	19.2	15.6	3.7	5.3	–	»
1912–13	8.7	44.8	20.9	11.6	3.0	11.0	–	»
1913–14	10.5	38.8	26.6	15.5	1.9	6.7	–	»
1914–15	10.2	31.9	23.3	21.7	4.4	8.5	–	»
1915–16	7.3	30.2	16.6	29.6	5.0	11.3	–	»
1916–17	15.2	46.7	12.1	6.6	3.5	15.9	–	»
1917–18	13.4	41.2	14.7	10.8	4.9	15.0	–	»
1918–19	11.7	49.4	13.5	18.2	2.8	4.4	–	»
1919–20	13.4	49.1	11.6	20.1	2.7	3.1	–	»
1920–21	11.9	42.3	13.3	26.6	1.8	4.1	–	»
1921–22	11.5	40.3	11.6	26.4	5.0	5.2	–	»
1922–23	11.3	31.9	15.9	30.3	5.4	5.2	–	»
1923–24	12.3	36.1	9.8	25.9	5.1	10.7	–	»
1924–25	14.6	40.5	12.3	24.9	5.8	1.8	–	»
1925–26	10.4	34.9	11.1	36.7	5.1	1.7	–	»
1926–27	10.3	42.4	10.0	30.3	6.0	1.0	–	»
1927–28	11.0	38.9	8.6	35.1	5.4	1.0	–	»
1928–29	10.0	40.0	11.4	30.8	5.3	2.4	–	»
1929–30	13.1	43.1	8.1	27.8	6.3	1.6	–	»

Anni Accademici	Nazionali					Albania	America			Austria	Belgio
	Dell'Italia Settentrionale	Dell'Italia Centrale extra laziali	Laziali	Dell'Italia Meridionale	Totale dei Nazionali		Settent.	Centrale	Merid.		
1869–70	144	263	374	169	950	–	–	–	–	–	–
1870–71	98	266	326	123	813	–	–	–	–	–	–
1871–72	101	272	318	119	810	–	–	–	–	–	–
1872–73	67	118	295	76	556	–	–	–	–	–	–
1873–74	62	117	287	76	542	–	–	–	–	–	–
1874–75	59	129	266	68	522	–	–	–	–	–	–
1875–76	57	121	272	69	519	–	–	–	–	–	–
1876–77	76	87	344	85	592	–	–	–	–	–	–
1877–78	81	124	356	112	673	–	–	–	–	–	1
1878–79	94	124	363	116	697	–	–	–	–	–	–
1879–80	117	198	373	134	822	–	–	–	–	–	2
1880–81	131	208	359	142	840	–	–	–	–	1	–
1881–82	157	272	378	179	986	–	–	–	–	–	1
1882–83	198	274	361	200	1033	–	–	–	–	2	–
1883–84	206	285	425	213	1129	–	–	–	–	2	–
1884–85	211	361	468	239	1279	–	1	–	1	2	–
1885–86	219	382	474	258	1333	–	2	–	2	1	–
1886–87	223	421	491	271	1406	–	1	–	1	–	–
1887–88	235	414	497	284	1430	–	1	–	–	1	–
1888–89	239	495	505	282	1521	–	1	–	–	1	–
1889–90	193	553	534	258	1538	–	3	–	–	2	4
1890–91	214	594	538	299	1645	1	–	2	1	2	1
1891–92	210	547	567	295	1619	–	–	2	1	2	–
1892–93	228	542	663	345	1778	–	–	2	–	2	–
1893–94	239	568	673	428	1908	–	–	–	1	1	–
1894–95	261	629	752	547	2189	–	–	–	–	1	–
1895–96	254	629	816	594	2293	–	–	–	–	1	–
1896–97	319	560	898	627	2404	–	–	–	–	2	–
1897–98	327	554	912	633	2426	–	2	–	–	3	–
1898–99	293	628	921	691	2533	–	–	1	1	2	3
1899–1900	272	707	937	762	2678	–	–	–	–	3	2
1900–01	267	713	919	753	2652	–	–	1	1	3	–
1901–02	291	684	1022	773	2770	–	1	–	4	–	–
1902–03	303	673	1049	798	2823	–	1	–	3	–	5

Tavola XIX.

d'origine (1870-1931).

Esteri																	Totale Generale degli Studenti
Danimarca	Egitto	Francia	Germania	Grecia	Inghilterra	Jugoslavia	Olanda	Polonia	Rumenia	Russia	Scandinavia	Spagna	Svizzera	Turchia	Ungheria	Totale Esteri	
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	950
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	813
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	810
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	556
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	542
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	522
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	519
–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	2	594
–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	3	676
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	2	699
–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	5	827
–	–	2	2	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	6	846
–	–	2	3	–	–	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	8	994
–	–	4	2	–	–	–	–	–	1	–	–	–	1	–	–	10	1043
1	1	1	1	2	–	–	–	–	1	–	–	–	1	–	–	9	1138
1	2	–	1	–	1	–	–	1	1	–	–	–	2	–	–	13	1292
1	1	–	1	1	1	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	11	1344
1	–	–	1	1	–	–	1	–	–	–	–	–	–	4	–	10	1416
–	2	1	2	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	4	–	13	1443
–	2	–	3	–	–	3	–	–	–	–	–	2	–	5	–	17	1538
–	4	2	4	–	1	2	1	–	3	–	–	4	–	6	–	36	1574
–	1	2	5	–	2	2	–	–	1	–	–	1	–	2	–	23	1668
–	2	2	4	–	–	–	–	–	2	–	–	3	–	–	–	18	1637
–	3	1	4	–	2	1	–	–	1	1	–	2	–	–	–	19	1797
–	3	–	2	–	2	–	–	–	1	1	–	1	2	–	1	15	1923
–	2	5	4	–	3	–	–	–	–	1	–	2	2	–	1	21	2210
–	3	8	3	1	2	–	–	–	–	2	–	2	2	2	–	26	2319
–	2	6	2	2	3	1	–	–	–	1	–	1	3	1	–	23	2427
–	3	5	1	–	2	–	–	–	–	3	–	–	2	–	–	21	2447
–	4	–	2	–	2	–	–	–	1	5	–	–	3	–	–	24	2557
–	5	4	3	2	4	–	–	–	–	3	–	4	–	–	–	30	2708
–	6	4	6	1	–	–	–	–	–	1	–	1	–	1	1	27	2679
–	8	4	4	3	2	1	–	–	–	–	–	–	–	2	1	31	2801
–	7	3	4	2	1	–	–	–	–	–	–	1	–	1	2	30	2853

Anni Accademici	Nazionali					Albania	America			Austria	Belgio
	Dell'Italia Settentrionale	Dell'Italia Centrale extra i laziali	Laziali	Dell'Italia Meridionale	Totale dei Nazionali		Settent.	Centrale	Merid.		
1903–04	243	704	907	721	2575	–	–	–	3	1	–
1904–05	286	921	526	823	2554	–	2	1	3	1	–
1905–06	276	897	674	760	2607	–	–	1	8	3	–
1906–07	287	882	711	801	2681	–	–	2	9	3	–
1907–08	316	732	999	798	2845	–	3	–	7	–	–
1908–09	291	697	926	1080	2994	–	2	–	6	–	3
1909–10	306	708	917	1074	3005	–	1	–	8	–	1
1910–11	353	743	943	1088	3127	–	2	–	5	–	–
1911–12	368	719	987	1097	3171	–	2	–	8	1	–
1912–13	371	727	1075	1132	3305	–	1	–	17	–	–
1913–14	382	852	1069	1151	3454	1	1	–	9	2	1
1914–15	471	890	1393	1399	4153	–	–	–	–	–	–
1915–16	579	1048	1324	1383	4334	–	–	–	–	–	–
1916–17	477	911	1302	1302	3992	–	–	–	–	–	–
1917–18	562	907	1299	1343	4111	–	–	–	–	–	–
1918–19	719	847	1621	1542	4729	8	1	–	12	2	–
1919–20	846	1076	1776	1661	5359	8	4	–	2	10	–
1920–21	921	1135	1959	1836	5851	8	1	1	4	11	–
1921–22	886	1224	1847	1835	5792	9	7	1	6	12	–
1922–23	777	1231	1763	1742	5513	6	6	2	4	5	–
1923–24	648	1013	1738	1617	5016	8	12	1	1	13	–
1924–25	471	917	1629	1468	4485	12	9	2	7	9	–
1925–26	461	869	1694	1544	4568	15	12	–	9	14	–
1926–27	446	835	1663	1469	4413	9	12	3	18	–	–
1927–28	448	843	1634	1482	4407	5	8	5	21	1	–
1928–29	506	929	1879	1787	5101	5	9	4	8	–	–
1929–30	514	970	1897	1734	5115	12	29	10	20	1	–
1930–31	557	983	2114	1867	5521	17	52	9	22	1	–

(1) Nel totale degli esteri nell'anno 1926-27 sono compresi: 2 dell'Asia Minore; 1 Etiop
(2) » » » » » 1927-28 » » 3 Armeni, 2 Lettoni, 1 Litu
(3) » » » » » 1928-29 » » 1 Armeno, 2 Lituani, 2 Mal
(4) » » » » » 1929-30 » » 2 Armeni, 1 della Città del Va
(5) » » » » » 1930-31 » » 1 Abissino, 1 Armeno, 1 Lett

Segue TAVOLA XIX.

o d'origine (1870-1931).

ESTERI																	TOTALE GENERALE DEGLI STUDENTI
Danimarca	Egitto	Francia	Germania	Grecia	Inghilterra	Jugoslavia	Olanda	Polonia	Rumenia	Russia	Scandinavia	Spagna	Svizzera	Turchia	Ungheria	TOTALE ESTERI	
–	6	6	6	1	2	1	–	1	1	1	–	1	–	3	–	33	2608
–	5	8	7	3	2	–	–	3	–	–	–	2	1	1	–	39	2593
–	3	4	4	1	2	3	–	–	1	–	–	3	2	2	–	37	2644
–	4	3	5	2	2	3	–	–	1	–	–	2	3	2	–	41	2722
–	6	4	3	3	2	3	–	–	3	–	–	4	5	3	–	46	2891
–	5	2	7	4	1	4	–	–	4	15	–	3	2	1	–	60	3054
–	1	6	6	2	6	1	2	–	1	18	–	1	2	2	–	60	3065
–	1	7	6	2	3	–	1	–	3	11	–	1	–	1	–	43	3170
–	3	9	1	3	1	–	1	–	–	23	–	–	–	1	–	54	3225
–	3	12	–	3	–	–	1	–	1	22	–	–	7	–	–	67	3372
–	2	9	6	3	3	9	–	5	1	25	–	–	3	1	–	82	3536
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	4153
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	4334
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	3992
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	4111
–	5	6	1	5	2	14	–	–	–	6	–	–	1	–	–	63	4792
–	7	9	–	3	1	5	–	–	6	3	–	–	3	1	–	67	5426
–	10	9	3	6	–	7	–	5	9	4	–	–	3	3	1	95	5946
–	11	14	2	5	1	8	–	5	6	3	1	–	5	2	1	104	5896
–	11	10	2	4	–	6	–	5	7	5	1	–	5	1	–	90	5603
–	5	12	3	5	3	4	–	4	15	14	–	–	8	3	3	127	5143
–	11	6	7	2	4	7	–	7	14	12	–	–	11	3	6	132	4617
–	10	9	5	2	10	4	–	11	28	11	1	–	11	2	10	167	4735
1	12	4	7	2	6	13	–	13	35	7	1	1	19	3	20	(1) 213	4626
–	2	3	7	7	5	5	–	16	48	3	–	–	10	3	31	(2) 209	4616
–	1	1	8	5	5	3	–	6	9	3	–	–	10	2	14	(3) 113	5214
–	1	–	8	4	1	5	1	9	30	1	–	1	11	4	20	(4) 197	5312
–	2	3	6	7	3	4	–	13	23	3	1	–	13	3	27	(5) 237	5758

oni, 3 Lituani, 3 Maltesi, 2 Palestinesi, 1 Persiano, 6 Tunisini.
alestinesi, 1 del Portogallo, 3 Tunisini.
alestinesi, 1 Persiano.
3 Lituani, 3 Maltesi, 3 Palestinesi, 1 del Portogallo, 1 della Repubblica di San Marino, 2 Tunisini.
ituani, 2 Palestinesi, 1 Persiano, 1 della Repubblica di San Marino, 2 delle Colonie Inglesi.

Anni Accademici	Nazionali					Albania	America			Austria	Belgio
	Dell'Italia Settentrionale	Dell'Italia Centrale extra i laziali	Laziali	Dell'Italia Meridionale	Totale dei Nazionali		Settent.	Centrale	Merid.		
1869–70	28	38	45	47	158	–	–	–	–	–	–
1870–71	23	33	43	37	136	–	–	–	–	–	–
1871–72	20	33	35	32	120	–	–	–	–	–	–
1872–73	11	26	27	22	86	–	–	–	–	–	–
1873–74	9	22	25	19	75	–	–	–	–	–	–
1874–75	8	22	26	17	73	–	–	–	–	–	–
1875–76	11	25	26	23	85	–	–	–	–	–	–
1876–77	21	39	34	27	121	–	–	–	–	–	–
1877–78	26	39	35	30	130	–	–	–	–	–	–
1878–79	23	35	37	29	124	–	–	–	–	–	–
1879–80	25	38	43	32	138	–	–	–	–	–	–
1880–81	27	42	46	33	148	–	–	–	–	–	–
1881–82	39	39	44	31	153	–	–	–	–	–	–
1882–83	31	42	45	29	147	–	–	–	–	–	–
1883–84	33	45	68	30	176	–	–	–	–	–	–
1884–85	44	36	86	33	199	–	–	–	–	–	–
1885–86	32	63	83	35	213	–	–	–	–	3	–
1886–87	33	51	105	44	233	–	–	–	–	–	–
1887–88	32	59	80	42	213	–	–	–	–	–	–
1888–89	53	74	85	48	260	–	–	–	–	–	–
1889–90	47	71	93	42	253	–	–	–	–	–	–
1890–91	38	82	93	49	262	1	–	–	–	–	–
1891–92	42	75	108	45	270	–	–	–	–	–	–
1892–93	42	103	106	66	317	–	–	1	–	–	–
1893–94	38	101	104	73	316	–	–	–	–	–	–
1894–95	43	104	108	71	326	–	–	–	–	–	–
1895–96	54	127	125	76	382	–	–	–	–	1	–
1896–97	55	126	131	79	391	–	–	–	–	–	–
1897–98	61	142	143	94	440	–	–	–	–	–	–
1898–99	57	124	127	76	384	–	–	–	–	–	1
1899–1900	84	147	159	117	507	–	–	–	–	–	–
1900–01	80	150	158	104	492	–	–	–	–	1	–
1901–02	81	153	141	101	476	–	–	–	1	–	–
1902–03	76	154	139	107	476	–	–	–	1	–	1

TAVOLA XX.

... d'origine (1870-1930)

ESTERI																		TOTALE GENERALE DEI LAUREATI
Danimarca	Egitto	Francia	Germania	Grecia	Inghilterra	Jugoslavia	Olanda	Polonia	Rumenia	Russia	Scandinavia	Spagna	Svizzera	Turchia	Ungheria	Di altre Nazionalità	TOTALE DEGLI STRANIERI	
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	158
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	136
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	120
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	86
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	73
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	85
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	I	–	–	–	–	I	122
–	–	I	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	I	131
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	124
–	–	I	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	I	139
–	–	I	–	–	–	–	–	–	I	–	–	–	–	–	–	–	2	150
–	–	–	I	–	–	–	–	–	–	–	–	I	–	–	–	–	2	155
–	–	I	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	3	150
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	176
–	–	–	–	–	–	–	–	–	I	–	–	–	–	–	–	–	I	200
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	3	216
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	I	234
–	–	–	–	–	–	–	–	–	I	–	–	–	–	–	–	–	I	214
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	I	–	–	I	261
–	–	I	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	I	254
–	–	–	–	–	I	–	–	–	–	–	–	–	–	2	–	–	4	266
–	–	–	I	–	–	–	–	–	–	–	–	I	–	–	–	–	2	272
–	I	–	–	–	–	I	–	–	I	–	–	I	–	–	–	–	5	322
–	–	–	–	–	–	–	–	–	I	–	–	–	I	–	–	–	2	318
–	–	–	I	–	–	–	–	–	I	–	–	–	–	–	–	–	2	328
–	–	–	I	–	–	–	–	–	–	–	–	I	I	–	–	–	4	386
–	–	3	–	–	I	–	–	–	–	–	–	–	I	–	–	–	5	396
–	I	2	–	–	–	–	–	–	–	I	–	–	–	–	–	–	4	444
–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	5	389
–	I	2	I	–	I	–	–	–	–	–	–	I	–	–	–	–	6	513
–	2	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	5	497
–	2	I	I	I	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	6	482
–	2	I	I	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	6	482

Anni Accademici	Nazionali					Albania	America			Austria	Belgio
	Dell'Italia Settentrionale	Dell'Italia Centrale extra i laziali	Laziali	Dell'Italia Meridionale	Totale dei Nazionali		Settent.	Centrale	Merid.		
1903–04	65	144	142	99	450	–	–	–	1	–	–
1904–05	64	153	128	95	440	–	1	–	–	–	–
1905–06	62	158	133	93	446	–	–	–	2	–	–
1906–07	51	135	138	75	399	–	–	–	2	–	–
1907–08	66	141	144	83	434	–	–	–	2	–	–
1908–09	87	174	166	118	545	–	–	–	1	–	–
1909–10	72	163	168	107	510	–	–	–	2	–	–
1910–11	63	167	152	92	474	–	–	–	1	–	–
1911–12	76	182	147	104	509	–	–	–	–	–	–
1912–13	78	159	151	105	493	–	–	–	4	–	–
1913–14	87	186	162	124	559	–	–	–	3	–	–
1914–15	76	141	158	105	480	–	–	–	–	–	–
1915–16	55	136	136	70	397	–	–	–	–	–	–
1916–17	47	88	103	51	289	–	–	–	–	–	–
1917–18	34	95	107	70	306	–	–	–	–	–	–
1918–19	94	204	194	171	663	1	–	–	3	–	–
1919–20	121	324	269	236	950	3	1	–	–	3	–
1920–21	91	304	244	185	824	–	–	–	1	3	–
1921–22	106	261	206	172	745	2	1	–	–	4	–
1922–23	119	316	277	223	935	–	1	–	–	1	–
1923–24	103	215	181	198	697	–	2	–	–	2	–
1924–25	98	190	163	171	622	3	2	–	1	2	–
1925–26	114	243	206	261	824	–	1	–	–	–	–
1926–27	121	255	233	287	896	2	–	–	–	2	–
1927–28	96	249	228	252	825	2	–	–	–	–	–
1928–29	103	244	269	293	909	–	1	–	1	–	–
1929–30	99	224	277	301	901	1	–	–	1	–	–

(1) Nel totale degli Esteri, nell'anno 1926-27 sono compresi: 1 Palestinese e 1 Lituano.
(2) » » » » » 1927-28 » » 1 Estone e 1 Lettone.
(3) » » » » » 1928-29 » » 2 Armeni, 1 Australiano, 1 Pale
(4) » » » » » 1929-30 » » 1 Palestinese e 1 Lituano.

Segue TAVOLA XX.

d'origine (1870-1930).

Esteri																		Totale Generale dei Laureati
Egitto	Francia	Germania	Grecia	Inghilterra	Jugoslavia	Olanda	Polonia	Rumenia	Russia	Scandinavia	Spagna	Svizzera	Turchia	Ungheria	Di altre Nazionalità	Totale degli Stranieri	
–	2	2	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	7	457
2	3	–	1	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	8	448
1	1	2	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	7	453
1	–	3	–	–	1	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	8	447
2	1	–	1	–	–	–	–	–	–	–	1	2	1	–	–	10	444
2	–	2	1	–	1	–	–	1	3	–	1	–	–	–	–	12	557
–	2	2	–	2	–	–	–	–	3	–	–	–	–	–	–	11	521
–	2	2	–	1	–	–	–	1	1	–	–	–	–	–	–	8	482
2	3	–	–	–	–	–	–	–	5	–	–	–	1	–	–	11	520
1	3	–	1	–	–	–	–	–	4	–	–	2	–	–	–	15	508
–	3	2	1	1	3	–	1	–	6	–	–	1	–	–	–	21	580
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	480
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	397
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	289
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	306
1	2	–	1	–	3	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	13	676
2	1	–	–	–	1	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	14	964
3	3	1	2	–	1	–	–	–	2	–	–	–	1	–	–	19	843
2	4	–	1	–	2	–	1	2	–	–	–	1	–	–	–	21	766
2	3	1	1	–	1	–	1	2	1	–	–	1	1	–	–	18	953
1	3	1	–	1	–	–	1	–	4	–	3	2	–	–	–	24	721
3	2	–	2	1	2	–	1	3	2	–	–	3	–	1	–	29	651
–	–	–	–	–	–	–	1	9	–	–	–	1	1	–	–	12	836
1	–	–	–	1	–	–	1	7	1	–	–	–	–	2	–	(1) 19	915
–	–	–	1	1	–	–	3	13	1	–	–	–	–	3	–	(2) 26	851
1	–	1	1	–	–	–	3	14	–	–	–	–	1	6	–	(3) 44	953
2	–	1	1	1	1	–	4	8	3	–	–	1	3	6	–	(4) 37	938

(1) Tunisino, 2 Lettoni e 3 Lituani.

Tavola XXI.

Percentuali degli Studenti distinti per luogo d'origine (1870-1931).

Anni Accademici	% dei Nazionali	% degli Esteri	Totale	% per l'Italia Settentr.	% per l'Italia Centrale	% per l'Italia Meridion.	Totale
1869–70	100.–	–	100.–	15.2	67.1	17.7	100.–
1870–71	100.–	–	»	12.1	72.8	15.1	»
1871–72	100.–	–	»	12.5	72.8	14.7	»
1872–73	100.–	–	»	12.1	74.3	13.6	»
1873–74	100.–	–	»	11.4	74.6	14.0	»
1874–75	100.–	–	»	11.3	75.7	13.0	»
1875–76	100.–	–	»	11.0	75.7	13.3	»
1876–77	99.7	0.3	»	12.8	72.8	14.4	»
1877–78	99.6	0.4	»	12.1	71.3	16.6	»
1878–79	99.7	0.3	»	13.5	69.8	16.7	»
1879–80	99.4	0.6	»	14.2	69.5	16.3	»
1880–81	99.3	0.7	»	15.4	67.9	16.7	»
1881–82	99.2	0.8	»	15.9	65.9	18.2	»
1882–83	99.0	1.0	»	19.2	61.5	19.3	»
1883–84	99.2	0.8	»	18.2	62.9	18.9	»
1884–85	99.0	1.0	»	16.5	64.8	18.7	»
1885–86	99.2	0.8	»	16.4	64.2	19.4	»
1886–87	99.3	0.7	»	15.9	64.9	19.2	»
1887–88	99.1	0.9	»	16.5	64.2	19.3	»
1888–89	98.9	1.1	»	15.7	65.8	18.5	»
1889–90	97.7	2.3	»	12.5	70.7	16.8	»
1890–91	98.6	1.4	»	13.0	68.8	18.2	»
1891–92	98.9	1.1	»	13.0	68.8	18.2	»
1892–93	98.9	1.1	»	12.8	67.8	19.4	»
1893–94	99.2	0.8	»	12.5	65.1	22.4	»
1894–95	99.0	1.0	»	11.9	63.1	25.0	»
1895–96	98.9	1.1	»	11.1	63.0	25.9	»
1896–97	99.1	0.9	»	13.3	60.0	26.1	»
1897–98	99.1	0.9	»	13.5	60.4	26.1	»
1898–99	99.1	0.9	»	11.6	61.2	27.2	»
1899–1900 . . .	98.9	1.1	»	10.2	61.4	28.4	»

Segue TAVOLA XXI.

Percentuali degli Studenti distinti per luogo d'origine (1870-1931).

ANNI ACCADEMICI	% dei Nazionali	% degli Esteri	TOTALE	% per l'Italia Settentr.	% per l'Italia Centrale	% per l'Italia Meridion.	TOTALE
1900–01	99.0	1.0	100.–	10.1	61.5	28.4	100.–
1901–02	98.9	1.1	»	10.5	61.6	27.9	»
1902–03	98.9	1.1	»	10.7	61.0	28.3	»
1903–04	98.7	1.3	»	9.4	62.6	28.0	»
1904–05	98.7	1.3	»	11.7	56.8	31.5	»
1905–06	98.6	1.4	»	10.6	60.3	29.1	»
1906–07	98.5	1.5	»	10.7	59.4	29.9	»
1907–08	98.4	1.6	»	11.1	60.8	28.1	»
1908–09	98.0	2.0	»	9.8	54.1	36.1	»
1909–10	98.0	2.0	»	10.2	54.1	35.7	»
1910–11	98.6	1.4	»	11.3	53.9	34.8	»
1911–12	98.3	1.7	»	11.6	53.8	34.6	»
1912–13	98.0	2.0	»	11.2	54.6	34.2	»
1913–14	97.7	2.3	»	11.1	55.6	33.3	»
1914–15	100.–	–	»	11.5	55.5	33.0	»
1915–16	100.–	–	»	13.4	54.7	31.9	»
1916–17	100.–	–	»	11.9	55.4	32.7	»
1917–18	100.–	–	»	13.7	53.7	32.6	»
1918–19	98.7	1.3	»	15.2	52.2	32.6	»
1919–20	98.8	1.2	»	15.8	53.2	31.0	»
1920–21	98.4	1.6	»	15.7	52.9	31.4	»
1921–22	98.2	1.8	»	15.3	53.0	31.7	»
1922–23	98.4	1.6	»	14.1	54.3	31.6	»
1923–24	97.5	2.5	»	12.9	54.9	32.2	»
1924–25	97.1	2.9	»	10.5	56.8	32.7	»
1925–26	96.4	3.6	»	10.3	56.3	33.4	»
1926–27	95.4	4.6	»	10.1	56.6	33.3	»
1927–28	95.5	4.5	»	10.2	56.2	33.6	»
1928–29	97.8	2.2	»	9.9	55.1	35.0	»
1929–30	96.3	3.7	»	10.0	56.1	33.9	»
1930–31	95.9	4.1	»	10.1	56.1	33.8	»

Tavola XXII.

Percentuali dei Laureati distinti per luogo d'origine (1870-1930).

Anni Accademici	% per i Nazionali	% per gli Esteri	Totale	% per l'Italia Settentrionale	% per l'Italia Centrale	% per l'Italia Meridionale	Totale
1869–70	100.–	–	100.–	17.7	52.6	29.7	100.0
1870–71	100.–	–	»	16.9	55.9	27.2	»
1871–72	100.–	–	»	16.3	57.7	26.0	»
1872–73	100.–	–	»	12.9	62.4	24.7	»
1873–74	100.–	–	»	12.0	62.7	25.3	»
1874–75	100.–	–	»	11.0	65.8	23.2	»
1875–76	100.–	–	»	12.9	60.0	27.1	»
1876–77	99.2	0.8	»	17.4	60.3	22.3	»
1877–78	99.2	0.8	»	20.0	56.9	23.1	»
1878–79	100.–	–	»	18.5	58.1	23.4	»
1879–80	99.3	0.7	»	18.1	58.7	23.2	»
1880–81	98.7	1.3	»	18.2	59.5	22.3	»
1881–82	98.7	1.3	»	25.5	54.2	20.3	»
1882–83	98.0	2.0	»	21.1	59.2	19.7	»
1883–84	100.0	–	»	18.8	64.2	17.0	»
1884–85	99.5	0.5	»	22.1	61.3	16.6	»
1885–86	98.6	1.4	»	15.0	68.6	16.4	»
1886–87	99.6	0.4	»	14.2	67.0	18.8	»
1887–88	99.5	0.5	»	15.0	65.3	19.7	»
1888–89	99.6	0.4	»	20.4	61.2	18.4	»
1889–90	99.6	0.4	»	18.6	64.8	16.6	»
1890–91	98.5	1.5	»	14.5	66.8	18.7	»
1891–92	99.3	0.7	»	15.6	67.8	16.6	»
1892–93	98.4	1.6	»	13.3	65.9	20.8	»
1893–94	99.4	0.6	»	12.0	64.9	23.1	»
1894–95	99.4	0.6	»	13.2	65.0	21.8	»
1895–96	99.0	1.0	»	14.2	65.9	19.9	»
1896–97	98.7	1.3	»	14.1	65.7	20.2	»
1897–98	99.1	0.9	»	13.9	64.8	21.3	»
1898–99	98.7	1.3	»	14.8	65.4	19.8	»
1899–1900 . . .	98.8	1.2	»	16.6	60.4	23.0	»

Segue TAVOLA XXII.

Percentuali dei Laureati distinti per luogo d'origine (1870-1930).

ANNI ACCADEMICI	% per i Nazionali	% per gli Esteri	TOTALE	% per l'Italia Settentrionale	% per l'Italia Centrale	% per l'Italia Meridionale	TOTALE
1900–01	99.0	1.0	100.–	16.3	62.6	21.1	100.–
1901–02	98.8	1.2	»	17.0	61.8	21.2	»
1902–03	98.8	1.2	»	16.0	61.6	22.4	»
1903–04	98.5	1.5	»	14.4	63.6	22.0	»
1904–05	98.2	1.8	»	14.5	63.9	21.6	»
1905–06	98.5	1.5	»	13.9	65.2	20.9	»
1906–07	98.0	2.0	»	18.8	68.4	18.8	»
1907–08	97.7	2.3	»	15.2	65.7	19.1	»
1908–09	97.8	2.2	»	16.0	62.4	21.6	»
1909–10	97.9	2.1	»	14.1	64.9	21.0	»
1910–11	98.3	1.7	»	13.3	67.3	19.4	»
1911–12	97.9	2.1	»	14.9	64.7	20.4	»
1912–13	97.0	3.0	»	15.8	62.9	21.3	»
1913–14	96.4	3.6	»	15.6	62.3	22.1	»
1914–15	100.–	–	»	15.8	62.3	21.9	»
1915–16	100.–	–	»	13.9	68.5	17.6	»
1916–17	100.–	–	»	16.3	66.1	17.6	»
1917–18	100.–	–	»	11.1	66.0	22.9	»
1918–19	98.0	2.0	»	14.8	58.2	27.0	»
1919–20	98.5	1.5	»	12.7	62.5	24.8	»
1920–21	97.7	2.3	»	11.0	66.5	22.5	»
1921–22	97.3	2.7	»	14.2	62.7	23.1	»
1922–23	98.1	1.9	»	12.7	63.4	23.9	»
1923–24	96.7	3.3	»	14.8	56.8	28.4	»
1924–25	95.5	4.5	»	15.8	56.8	27.4	»
1925–26	98.6	1.4	»	13.8	54.5	31.7	»
1926–27	98.0	2.0	»	13.5	54.5	32.0	»
1927–28	96.9	3.1	»	11.6	57.9	30.5	»
1928–29	95.4	4.6	»	11.3	45.2	43.5	»
1929–30	96.1	3.9	»	11.0	55.6	33.4	»

P. GRANVILLE EDGE O. B. E.

Early population records in Spain

One of the greatest obstacles to the diffusion of knowledge is that associated with language ; it is a mournful thought that, for this reason alone, so many of us are condemned to remain completely ignorant of the works of foreign masters, while to those of us possessed of but an imperfect knowledge of the language of a foreign country, any inquiry which involves extended reference to works in the original tongue proves a somewhat arduous and dispiriting undertaking ; under such circumstances a study of the remote history of Spain, with a view to discovering evidences of the numbers and state of her population at different periods of time is, in some respects, a somewhat irksome task.

Yet such an inquiry holds out promise of interest ; the considerable and magnificent ruins which are scattered throughout the length and breadth of the land appear to suggest that in Roman times Spain might have been a densely populated country (1) ; these monuments are, in themselves, by no means sufficient to support the theories and statements relating to the prodigious numbers of people the country was supposed to maintain in those far-off days, for, it will be remembered, the prevailing belief was that under Roman rule the country (including Portugal) contained not less than 40 millions of people — a population which, if true, would have meant an average density of approximately 2,000 persons per square mile. Such statements may owe their origin to early references to the populousness of certain principal cities ; there is no justification, however, for adopting

(1) LIVY comments upon the numerous castles existing in the Spain of his day (Book 22, Chap. 19). The name *Castile* appears to have been adopted about the 10th century.

the view that such data (where they exist) may be applied indiscriminately to all towns for the purpose of estimating the population of the country as a whole (1). Many such statements too, are based upon the vague generalisations of early historians, who, while devoting considerable attention to describing kings and courts, intrigues and war-like enterprises, have little to say of the people at large.

And yet, exaggerated statements, or references to the ancient population of Spain have, from time to time, persuaded individuals (no less than in other countries) to engage in curious and elaborate calculations with a view to determining the probable numbers of the people in remote ages. One such worker, OSORIO Y REDIN (2), a Spanish author who wrote towards the end of the 17th century, devoted some attention to calculating the ancient population of Spain; it may be not without interest to consider his methods, for they illustrate the slender hypotheses sometimes underlying the estimates of early workers.

Adopting the data resulting from the trigonometrical survey completed by PEDRO ESQUIVEL, a task undertaken at the command of Philip II, during the second half of the 16th century, OSORIO Y REDIN estimated that the whole country contained some 150 millions of *fanegas* of land (3) capable of cultivation.

Assuming that approximately one-half of this cultivable area would be under tillage each year, and sown in certain proportions with wheat, rye, barley, and oats, and that each of these crops would produce a certain average yield, he next calculated what proportion of the total crops would be required for the support of cattle, etc., and the quantity remaining for human consumption. Having reached, to his own satisfaction, the latter item in terms of *fanegas* of

(1) " The pretended amount of population has been generally in the ratio of the distance of the period taken, and, of course, of the difficulty of refutation. A few random remarks of ancient writers have proved the basis for the wildest hypotheses, raising the estimates to the total of what the soil, under the highest possible cultivation, would be capable of supporting ". *History of the Reign of Ferdinand and Isabella.* W. H. PRESCOTT. Vol. II. London, 1851. Footnote, p. 598.

(2) ALVAREZ OSORIO Y REDIN. *Discurso.* Pubd, 1687, Reprinted Madrid 1745.

(3) A *fanega* of land . . . Approximately 1.6 acres (*Nuevo Diccionario Cuyas*). This measure appears to have varied between province and province LABORDE quotes figures varying between 1,250-4,089 feet for the *fanega* of land.

corn (1) he proceeded to the conclusion of his argument, *viz.* each *fanega* of corn should provide 16 lbs. of flour for bread-making — the average daily consumption of bread per person would be 1 ½ lbs. — and therefore, the available produce was sufficient to have provided for 78 millions of people ; this figure he seems to have assumed to have represented the population of Spain in Roman times.

Now such curious essays into the realm of population estimation may be of passing interest, yet their practical value is negligible, and in fact, of no more importance than are conjectural estimates based upon the vague accounts of historians who, in their turn, have had to rely upon the scanty and often doubtful records of contemporary writers in remote times.

Yet, and perhaps contrary to general belief, there exists in Spain a very considerable literature dealing directly or indirectly with the early population of that country — indeed, the records from the Middle Ages down to the time when census taking was definitely established, are comparatively numerous. We have no records of the state of the English population in pre-Norman times ; it is known, however, that following the Moorish conquest in the opening years of the 8th century, the *Vali Amheser* sent to the Caliph of Damascus in the year 721 A. D. a detailed account of Spain, containing in addition to other information an account of the population, while forty years later (761 A. D.) *Alhakem*, Caliph of Córdova, compiled a nominal roll, or tax list, or carried out an actual census (*enpadronamiento*) of his subjects (2).

Although the Moorish invasion introduced several centuries of constant and sanguinary warfare, it is difficult to believe that the Moors, having so immediately followed up their conquest by the institution of population inquiries, would have failed to maintain such records in the territories under their dominion (3) ; further research

(1) A *fanega* of corn . . . Between 122-125 lbs. LABORDE's figures show this measure varied from 124-173 lbs. *Itinéraire descriptif de l'Espagne*. ALEX DE LABORDE, Paris 1809.

(2) DON JOSÉ MERA . . . *Estadística*, Madrid, 1919, and BENITO CARQUEJA . . . *O Povo Portuguez*. Chap. II, Oporto 1916.

(3) Speaking of the Spanish Arabs PRESCOTT says " It would appear from a census instituted at Cordova at the close of the 10th century, that there were at that time in it 600 temples and 200,000 dwelling-houses " etc., (*Ferdinand and Isabella*. Chap. VIII, p. 301, vol. 1). I have no information relating to this enumeration.

might conceivably result in bringing to light many records of value and interest. A modern writer (1) states that *Pope Gregory VII* writing to *Alfonso VI* of Castile in 1081, announced that his subjects numbered *más de un millón de hombres*, a figure which may have been calculated from the information supplied by the Pope's Legates with a view to the assessment of Papal taxes such as *Peter's Pence*. The next reference we are able to quote does not appear until the 12th century, when in 1139, Alfonso VII of Castile caused the " mozárabes " (i. e. Christians under the sovereignty of a Moorish King) to be enumerated, and a tax-list prepared for the purpose of determining doubtful points touching the distribution of lands. Some two centuries later, the records of the Parliament or Assembly of Alcalá (*Cortes de Alcalá*) for the year 1348, make mention of census rolls, tax lists, and records of herds, etc., relating to various towns in the area ; three years later, the Parliament of Valladolid, convened by *Pedro I* in 1351, authorised the preparation of a register of certain towns (*Becerro de las Behetrías*) (2) for the purpose of recording particulars of the lordships of the royal sheep-walks (*Señoríos de las Merindades*) (3) of Castile, of Crown and private rights, and of various estates within the territory.

These references, confessedly meagre since they cover some six centuries of time, *do* suggest that enumerations of one kind or another were far from unknown during the earliest ages of Spanish history. However, until some enterprising investigator succeeds in bringing to light further documentary evidence of conditions in those far-off days, it becomes necessary to focus attention on less remote periods and, by reference to official and authentic records, endeavour to dis-

---

(1) R. Menéndez Pidal, *La España del Cid*, Madrid, 1929, Vol. 1, p. 101. Pidal assumes " hombres " to refer to adult males, and on this assumption estimates the total population to amount to 3 millions for an area (the whole north-west of the Peninsula down to the line of the Tagus) which now contains 9 millions. I am indebted for this reference to Mr. A. K. Jameson, of the Department of Spanish, University of London, King's College, London.

(2) *Becerro de las Behetrías*, i. e. Register of the rights of the Crown and of other overlords in the Behetrías which were townships and communal bodies possessing the right of choosing their overlords.

(3) *Merindad*. An area under the jurisdiction of a Merino, who, though he may originally have had something to do with the collection of grazing tolls from the shepherds, had, before the 14th century, become an ordinary royal executive official. Hence, *Merindad* connotes simply one kind of territorial division.

cover what evidence exists that can throw light on the state of the population in Spain at times dating from the Middle Ages to the 19th century when, in common with other European countries, Spain adopted the principle of census-taking at decennial intervals.

It is a matter of general knowledge that in the *Archives of Simancas*, the rich national repository of the records of the earlier history of Spain, are preserved numerous documents of value relating to the condition or state of the people at different periods, and it is to that collection the investigator would naturally turn to pursue his inquiries. Unfortunately, the keenest scientific interest in such literature is insufficient in itself to bridge the difficulties of accessibility — conditions of time, of cost, the language problem, or even the geographical situation of Simancas — impose obstacles which few of us are able to surmount. On the other hand, there have always been in all civilized countries, interested researchers whose devoted labours have been the means of placing at the disposal of the world at large, information which, but for their endeavours, either would have remained unknown, or would have become available at much later ages. So far as Spain is concerned, the works of ESTRADA (1), BERNÁLDEZ (2), MARIANA (3), CAPMANY (4) and other authors equally famous, are justly regarded as the classics of Spanish history.

But, as often happens, while the literary or scientific enterprises of a favoured few receive the applause of their countrymen or of nations, other men, whose labours are no less important, and whose contributions not less vital to the spread of knowledge, are passed by unnoticed : the present paper is concerned with one of these lesser known workers, TOMÁS GONZÁLES, a dignitary of the Cathedral of Plasencia (5) at the beginning of the 19th century, for his contributions

---

(1) JUAN ANTONIO DE ESTRADA. *Población General de España.* 3 vols, Madrid, 1747.

(2) ANDRÉS BERNÁLDEZ. *Historia de los Reyes Catolicos* D. FERNANDO Y DOÑA ISABEL. This work was published early in the 16th century. The edition consulted by the present writer was published at Seville 1870.

(3) JUAN DE MARIANA. *Historia General de España.* Originally appeared in Latin, the first Spanish edition being published between 1601-1623. Edition consulted for the present paper published Madrid, 1848.

(4) ANTONIO DE CAPMANY Y MONTPALAU. *Cuestiones críticas sobre varios puntos de história económica, politica, y militar.* Madrid, 1807.

(5) TOMÁS GONZÁLEZ, *Maestrescuela de la Iglesia Catedral de Plasencia.* The *Maestrescuela* originally had the task of teaching theology in the Cathedral seminarios, but by Gonzalez's time the post had become purely honorary.

to our knowledge of the earlier population data of Spain, seem worthy of some comment.

Between the years 1815-1828, González was engaged in examining and co-ordinating various memoranda preserved in the *Royal Archives of Simancas*, and in the course of this work, came across many official documents of first-rate importance having reference to the population and its distribution in the provinces and territorial divisions of the country at various periods of time. In the Introduction to the published results of his investigations (1) he remarks that, though his researches were more particularly devoted to 16th century records, they were not limited to that period of Spanish opulence and splendour, but included such information available relating to various periods preceding and following that age. He adds that his studies were designed to present authentic data by means of which the movement of the population might be followed at different epochs, and further, to dispose of the fiction so prevalent among both national and foreign writers that the Spanish government in earlier times had studiously failed to be interested in the state or distribution of the population within her peninsula boundaries. Bearing in mind that the documents he quotes are faithfully transcribed copies of original records *copiado fielmente* and presented in the language of the original documents ("*literalmente trasladados*") it may be assumed they are worthy of study; the notes which follow, are, in the main, a brief account of González's work, presented however, in chronological sequence, and not in the order in which the records appear in his original work.

The earliest record has reference to the numbers and distribution of households in the City and territory of *Baeza* (in the Province of Jaen) during the year 1407, and provides for each of the 10 parishes in the area, the numbers of households supplying knights, horse and foot, armed men, the aged, sick, unserviceable, and the clergy — a total of 1785 households. It should be stated at this stage that the majority of early population estimates in Spain are based upon the assumption that, on the average, each household comprised 5 persons; this method would give a probable population of *Baeza* in 1407 of 8,925 persons (2).

(1) *Censo de Población en el Siglo XVI con varios apéndices, etc.* Tomás González. Madrid en la Imprenta Real. Madrid, 1829.

(2) Throughout the work various comparative figures of the populations of different Provinces, towns, etc., are added. González remarks that these

The next record of interest is a copy of the original *Repartimiento* (1) of 1474, relating to Jewish assemblies or synagogues (*Aljamas de Judíos*) in the territories of the Crown of Castile, and of the monies then payable by members of the Jewish persuasion. From this document it appears that the Jews contributed some 450,000 *maravedís* (2) to the exchequer ; a footnote adds that, on the assumption that each head of a household contributed 50 *maravedís*, there were at that time 9,000 Jewish families, and these, on the usual basis of calculation would amount to 45,000 souls.

Of the two remaining official documents containing data relating to the 15th century, the first presents the results of a census which was carried out in 1482 (3), in the territories of the Crown of Castile presumably under the direction of one ALONSO DE QUINTANILLA, who describes himself as the chief computor or accountant (*Contador mayor*) ; according to this enumeration there were then 1,500,000 households in all the provinces and districts (not counting Granada (4)),

---

were taken from the tax registers (*encabezamiento de alcabalas*), rolls of military service, etc., but that, in view of the many exemptions due to privilege, to changes in territorial boundaries, or for other reasons, comparisons are by no means accurate.

(1) *Repartimiento*, the distribution or allotment of taxation. The total amount of tax to be raised was first decided upon and then the *Repartimiento* was made fixing the quota payable by each territorial division. At the time of the Spanish Conquests in America it was a term applied to an important institution providing for the division or allotment of persons or land, sometimes actual possession of land and at other times, the income from its produce. The holder of a *Repartimiento* was entitled to receive profits from the labours of the people living on the territory, actual service, or payment in lieu of service.

(2) *Maravedí*. According to BANCROFT, *History of Spanish America* 1882, the value of the *maravedí* towards the end of the 15th century would have been about ¼*d*. On the other hand, RICHMAN, *The Spanish Conquerors* 1919, considers it to have been worth about 2 ½d.

(3) PRESCOTT, referring to this census (*Ferdinand and Isabella*, Vol. II, Chap. 26, p. 598, footnote) says " From a curious document in the Archives of Simancas, consisting of a report made to the Spanish sovereigns by their accountant-general, Quintanilla, in 1492, it would appear that the population of the kingdom of Castile, exclusive of Granada, was then estimated at 1,500,000 *vecinos* or house-holders (Mem. de la Acad. de Hist. Apend. No. 12). This, allowing 4 ½ to a family would make the whole population 6,750,000 ".

The original record copied by GONZÁLES states the operation was carried out in *1482*.

(4) *Granada* when subdued in 1492 had approximately 70.000 houses ; this would mean an additional population of about 350,000 persons.

or a total population of 7,500,000 persons. The second record is a copy of a official statement of the houses and places in the Kingdom of Aragon in the year 1595, these details being taken from the original registers of the Court of Tarazona. Eleven closely printed pages are devoted to the presentation of the numbers of houses in each of the towns in the 10 districts comprising the Kingdom ; special distintion is made of towns whose populations were composed of Moors (*Moriscos*) and of towns where the people were of mixed type (*Mezclados*) through inter-marriage, and not of pure Spanish descent. This enumeration announces 53,238 houses, or, on the basis of 5 persons per house, a total population of 266,190 souls.

If the researches of González were exhaustive and complete (1), they would seem to suggest that 15th century records of population were by no means numerous — yet this is scarcely surprising. Throughout the Middle Ages, and indeed until late in the 15th century, Spain was broken up into independent and often hostile states — Granada in the hands of the Mohammedans, the throne of Castile occupied by one Prince, that of Aragon by another — having no federated head, until the crowns of Aragon and Castile became united under Ferdinand and Isabella towards the end of the 15th century ; the disturbed history of this period probably made frequent population inquiries matters of extreme difficulty or even impossibility.

Then came the century that introduced the most brilliant epoch in Spanish history, and at this stage one is led to wonder whether our researcher did, in fact, examine with sufficient care all the official literature relating to the period, or confined his attention solely to the transcription of hitherto unrecorded documents. The following reasons prompt these observations. It is common knowledge that throughout history, the Spanish laws against heretics were probably harsher than those of any other country. The Moors, and particularly the Jews, were the objects of marked attention ; they were faced with the alternative of either denying their faith or expulsion from the country, so that Spain might no longer be " polluted by the presence of unbelievers ". In these circumstances it is more than likely that strict regulations for the registration of these peoples would have been enforced — Ferdinand and Isabella reigned from

(1) Prescott mentions the results of a survey made between the years 1477-79 containing particulars of the population of the period, preserved at Simancas. (*Ferdinand and Isabella*, p. 255, Vol. I). I have not seen this.

1479 to 1516, yet, for the whole of this reign, GONZÁLES quotes no document exclusively devoted to records of Moors, to the numbers of Jews, their proportion to the total population, or to the numbers expelled under the terms of the Edict signed by the sovereigns at Granada on the 30th of March 1492 (1)

Indeed, no population record of any kind is again mentioned until 1534, when there appears a statement of Cities, Towns, and Places, in the Province of Salamanca, the results of an inquiry carried out at the command of the Emperor, Carlos V. by LUÍS VÁZQUEZ whose official appointment would perhaps most closely correspond with what, in these days, we should term the " Paymaster General " (e. g. *Contador del Sueldo*), and LUÍS FRANCO, a Roya Actuary (*Escribano Real*). This account gives the numbers of tax-paying citizens (*vecinos pecheros*) or householders in each area of the Province — a total of 52,420 householders, or by applying the usual multiplying factor (of 5), a population of 262,100 persons. For the year 1553 there was compiled a statement of the numbers of hearth-

---

(1) In this connection PRESCOTT remarks :— " The whole number of Jews expelled from Spain by Ferdinand and Isabella is variously computed from 160,000 to 800,000 ; a discrepancy sufficiently indicating the paucity of authentic data " (*Ferdinand and Isabella* vol. 1, Chap. 27, p. 518). As PRESCOTT omits to mention the sources of his information, the following observations are not without interest :—

" Así salieron de España hasta ochocientas mil Judíos según el testimonio de MARIANA ". (*Historia Crítica de la Inquisición de España.* DON JUAN ANTONIO LLORENTE. Madrid, 1822, Tome 2, Chap. VII, Art. 1, para. 7).

But though LLORENTE quotes MARIANA as his authority, the latter appears to lay claim to no original information, he, in his turn relying upon what *Most authors say*, " El número de los Judíos que salieron de Castilla y Aragón no se sabe ; los más autores dicen que fueron hasta en número de cienta y setenta mil casas, y no falta quien diga que llegaron a ochocientas mil almas " *Historia General de España.* Tome 2, Book 26, Chap. 1). Another contemporary writer, whose statements are regarded as dependable, says there were about 30,000 Jewish families (or 150,000 souls) in Castile, and 160,000 Jews in Aragón :— " En Castilla treinta mil familias de Judíos " and " En Aragón y sus reinos seis mil casados en que había más de ciento y sesanta mil ánimas ", (*Historia de los Reyes Católicos D. Fernando y Doña Isabel.* Tome 1, Chap. 110, Seville Edition, 1870) ANDRÉS BERNÁLDEZ. I am told by MR JAMESON (see Footnote p. 3). that R. ALTAMIRA *Historia de España,* Barcelona 1913 (generally considered the most authoritative modern history), vol. II, p. 422, says, that a modern Jewish writer has calculated the numbers as 165,000 expelled, 50,000 baptised, and 20,000 died. The reference is to an article on the expulsion of the Jews in the *Boletín de la Academia de la Historia,* vol. XVIII.

taxes (*número de fogages*) paid throughout the old Principality of Cataluña (presumably comprising the present-day provinces of Gerona, Barcelona, Lérida, and Tarragona) — in the aggregate, 65,394 hearths, while in the same year tax-lists were also prepared in the Kingdoms of Navarra and Valencia, and in the Basque Provinces. On the basis of such records as these, estimates of the probable populations of different Spanish territories might be attempted ; such essays however, need to be approached with caution, for these returns fail to discover the numbers of privileged persons exempted from payment of various taxes (1), of those who evaded payment, or of those absent for other reasons during the tax enumeration.

This brief account has now reached the period during which Philip II occupied the Spanish throne (1556-1598) ; in this reign several inquiries, more or less complete were carried out.

The first of these, relating to the *Merindad* (Royal Sheepwalk) (2) of Allende Ebro and to the Province of Alava, provides the names and populations of towns and areas in those territories in the year 1557 ; there is not, however, any indication of the methods whereby these data were obtained. Between 1581 and 1589, the Archbishops, Bishops and other clergy prepared returns of the numbers of Moors in diocesan territories in the Kingdom of Castile. Unfortunately, no sort of uniformity seems to have been observed in presenting the results of these inquiries, for the data are tabulated in a variety of ways, one area giving the males and females (separately) under and over 10 years of age ; another fixes the age-bar at 12 years,

---

(1) Privileges of nobility. " The higher nobility of *ricos hombres*, were exempted from general taxation ; and the occasional attempt to infringe on this privilege in reasons of great public emergency was uniformly repelled by this jealous body ". PRESCOTT. *Ferdinand and Isabella*, vol. I, p. 25, see also MARIANA *Hist. Gen. de España* Tome I, p. 644, Tome II, 176.

The practice of exempting certain privileged individuals or classes from particular impositions was common to all countries. Discussing the hearth taxes (*feux*) of France, even so late as the 14th century, AVENEL says :— " Les feux réellement existant dans les provinces se divisaient au point de vue administratif, en trois catégories, (i) les *nobles* qui étaient exempts, (ii) les *solvables* qui payaient, (iii) les *misérables* qui ne pouvaient payer ". *Histoire Economique de la Propriété, des Salaires, des Denrées, et de tous les Prix en Général depuis l'an 1200 jusqu'en l'an 1800.* GEORGES VICOMTE D'AVENEL. Tome III, p. 429, Paris, 1898.

(2) See Footnote p. 3.

another at 18, and so on. The results declare the existence of 46,275 families or 231,376 persons.

A statement relating to a much more limited inquiry states that, in the year 1571 there were 119,761 inhabitants within the territories of *Calatrava*, *Santiago*, and *Alcántara* — these being three of the then four Military Orders (*Ordenes Militares*) of Spain (1).

In 1587 also, returns relating to the populations of the various dioceses were prepared by the Archbishops, Bishops, and other clergy and forwarded to one Francisco González de Heredia, Secretary of the Royal Patronage of the Church (*Secretario del Real Patronato de la Iglesia*). These records, in which the relevant information is tabulated by parishes in the different dioceses, declared the population therein to comprise 6,631,929 souls. Another statement giving the numbers of nobles resident in 17 Provinces and in the Kingdom of Granada in the year 1590 occurs in the registers of the Treasury of the Excise (*Contaduría de Millones*) for that year (2). In 1594 a much more complete survey was undertaken for the purpose of determining the assessment and distribution of a special tax (*Donativo de Millones*) and the results of this inquiry are now regarded as the most complete and accurate statement preserved of the population

(1) Originally eleven orders, *viz.* Aragón 2., Catalonia 3., Navarra 2., and Castile 4. The members of all Orders were originally intended for service against the Moors ; after the conquest of Granada in 1492 these obligations lapsed. That of Calatrava was established in 1158, Santiago, taking its name from the shrine of St. James (San Jago) in 1105, and Alcántara, an offshoot of Calatrava in 1219, CONDE expresses the opinion that the Military Orders of Spain and of other countries were directly descended from the *Rabitos* or Moslemah Knights ; the rules of both institutions are very similar, e. g. " Parece verosímil que de estos rabitos procedieron así en España, como entre los cristianos de oriente, las Ordenes Militares tan célebres por su valor, y por sus distinguidos servicios prestados a la cristiandad, el instituto de unos y otros era muy semejantes ", JOSÉ ANTONIO CONDE. *Historia de la Dominación de los Arabes en España* Footnote, Chap. CXVII, p. 619, Madrid, 1820.

For further information touching the Military Orders of Spain see also, *Hist. Gen. de España.* MARIANA. Chaps. 2, 5, and 8.

Población General de España. ESTRADA, Tome 1, p. 300, Tome 2, p. 315.

Ferdinand and Isabella. PRESCOTT, Bk. 1, Chap. 6, pp. 242-249.

It is interesting to note that the King of Spain invested his second son, the Infante Don Jaime, with the dignity of Comendador Mayor of Castile in the Order of the knights of Calatrava, on March 10th, 1931.

(2) A footnote adds that data are insufficient for the estimation of the numbers of *Hidalgos* in the remaining Provinces.

of the kingdom at the end of the 16th century. Particulars of 40 Provinces (1) and of their sub-divisions are available in great detail, referring to each Region (*Tierra*), Territory assigned to a Royal Prince (*Infantazgo*), Archiepiscopal territory (*Mesa Arzobispal*), area of the jurisdiction of a Royal Sheep-Walk (*Merindad*) (2), County or Earldom (*Condado*), district (*Partido*), municipal Council (*Concejo*), rural Council (*Quadrilla*), group of townships (*Sesmo*), or place paying ancient pasturage fees (*Roda*). The inquiry was unique in the sense, on this occasion there were no class exemptions. In his *Advertencia Preliminar*, GONZÁLEZ states that the absence of such exemptions on this occasion was due to the fact that the tax was a special and extraordinary one known as "*Donativo*" to which exemptions from ordinary taxation did not apply. The inquiry was conducted with special care and the 1,338,617 tax-paying citizens (*vecinos pecheros*) recorded (3) were considered dependable.

However, a corrected statement of these figures gives the numbers of tax-payers as 1,340,320, which would mean a population of 6,701,600 persons, and furthermore, it would appear that certain areas were omitted from the records e. g. Vizcaya, Guipuzcoa, Alava, Navarra, Aragón, Valencia, and Cataluña ; the adjustment necessary for these non-enunerated divisions would result in an approximate estimate of 8,206,791 person in the country at that time. How reliable these figures are it is by no means easy to say, for another estimate based on the records of the 1594 enumeration gives the following results :—

1,340,320 households × 5	6,701,600	persons
Basque Provinces (omitted)	208,157	»
Nobles of Asturias (omitted)	225,000	»
Clergy (omitted)	169,300	»
Total in 1594	7,304,057	» (4)

There exists among the Spanish Archives belonging to this period, a statement of the population of the City of Madrid in the year

(1) Owing to changes in boundaries data are scarcely comparable with those of later times.

(2) See Footnote p. 3.

(3) By the usual method of estimation (1,338,617 × 5) would mean a total population of 6,693,085 souls.

(4) Such variations are by no means peculiar to Spanish estimates relating to the same century. Cf. the estimates of GREGORY KING, CHALMERS, and others in England ; MESSANCE, NECKER, VAUBAN, in France, etc.

1597, compiled from the original registers of the Easter Offering (*Cumplimiento Pasqual*) for that year, and giving for each of the eleven parishes of the city, the numbers of houses, families, and communicants, the totals being :—

Houses	7,016
Families	11,857
Communicants	45,422

A footnote adds that estimating 5 persons per family, the population would then amount to 59,285 souls (1).

It will have been seen that population inquiries were far from unknown or unregarded during the reign of Philip II. But there is another piece of statistical investigation associated with this reign, and though Tomás González makes no mention of it in the work we have been quoting, it may be of interest to refer to it at this stage.

With a view to obtaining complete information relating to his territories, Philip II commanded the learned Pedro Esquivel to examine and survey all areas, rivers, valleys, and mountains, both large and small, and to determine their exact size and situation. In addition, the king planned a gigantic undertaking which, had, it been completed, would have proved by far the greatest and most perfect piece of statistical work every attempted by any country up to that time. By royal command, each locality throughout his peninsula dominions was required to furnish complete and circumstantial particulars, in accordance with a questionnaire and instructions circulated by local officials. The inquiry demanded information relating to :—

The name of each locality, together with the origin of that name.
Number of houses, families, and persons in each.
Quality and condition of the soil.
Rivers, valleys etc., and their situation.
Churches, convents, miracles, relics etc.
Holidays, pilgrimages, markets, and fairs.
Fortresses, castles, ancient monuments, illustrious persons, etc.
And all other items of note or interest appertaining to the locality, but not mentioned in the instructions officially circulated, etc.

---

(1) The actual record incorrectly states 57,285.

This comprehensive task, begun in the year 1574 under the direction of *Ambrosio de Morales*, secured after rather more than 7 years of laborious effort, some 636 reports relating to upwards of 13,000 towns in Spain. These records, in 8 volumes, are preserved in the library of the *Escorial* under the title of *Descriptions of the towns of Spain, compiled by order of the All--Wise King, Philip II.* (*Descripciones de los pueblos de España hecha por orden del prudentísimo rey D. Felipe II*) ; this compilation is rather suggestive of the Statistical Account of Scotland undertaken by Sir JOHN SINCLAIR over two centuries later (1).

The story now approaches the opening years of another century, and it may be advisable to pause at this stage and consider what influences and motives combined to produce the accelerated activity which had its reflection in the numerous taxation, population, and other inquiries, which seem to have characterised the 16th century of Spanish history : it would appear that these manifestations must be ascribed in part to both internal and external national causes.

During this period there had developed among the Spanish nation, a profound military ardour and patriotic zeal which were at once the admiration and terror of the rest of the then civilized world ; money, arms, and men, were essential to the nation which was engaged in the compulsory conversion of heretics, in numerous war-like enterprises in different parts of Europe, and had also, by conquest, become possessed of vast territories in Central America, Chili, and Peru ; these gigantic undertakings would demand comparatively frequent national stock-takings of revenue and people, to ensure the continuation and successful presecution of such endeavours. The second cause may not unjustly be attributed to extended observation and adoption of methods followed in other countries — especially arising from knowledge gained by conquests in the New World.

It will be remembered that the campaigns of Pizarro and Cortes not only released vast stores of wealth and treasure which found their way to Spain, but further produced the realisation that the countries they had conquered, far from being the homes of primitive peoples, were the seat of highly developed civilizations ; Mexico and Peru had, in fact, reached an advanced stage of cultivation which, by contrast, was the more remarkable when considered in relation to the ignorance which characterised so many peoples of western Euro-

(1) This enquiry commenced in 1791.

pean States ; among other institutions which excited the surprise and admiration of the Spanish conquerors were the well-established and efficiently organised systems devoted to the collection and compilation of data relating to the revenue, the numbers of people, and to the records of births and deaths — systems so efficient, as scarcely to have any counterpart in the administrative machinery of any European government of that age (1). It is hardly believable that the Spanish authorities, once made aware of the advantages accruing from such systems which enabled the wealth or other details of a nation to be measured with precision, would not have adopted somewhat similar methods in Spain. Is it unreasonnable to suppose that all, or some of these reasons, had their effec in leading the central authorities to engage in more frequent fiscal and population inquiries throughout the Spanish peninsula.

17th century records now claim our attention, but before discussion of these, the earliest of which make brief reference to the expulsion of the Moors in 1609, it may be well to comment in the briefest possible manner on the attitude of the Spanish authorities towards that race, and observe the events which contributed to, and finally resulted in, the expulsion of these people from the country.

Following the conquest of the last remaining Mohammedan stronghold (that of Granada in 1492) the Spaniards turned their attention to the compulsory conversion of the conquered people to Christianity (2) ; repressive measures were introduced, and enforced

---

(1) Writing in 1554, the Spanish historian SARMIENTO makes the following observations :— " Cada provincia, en fin del año, mandava asentar, en los quipos por el cuento de sus nudos todos los hombres que habían muerto en ella en aquel año, y por el consiguiente los que habían nacido, y por principio del año que entrava, venían con los quipos al Cuzco ". In other words, Provincial annual returns of births and deaths were made to the capital city, Cuzco.

Calculations were made by the *Quipos*, a kind of primitive calculating machine, composed of knotted strings.

(2) The Catholic sovereigns issued a proclamation in 1499, commanding all Moors to become Christians or to depart the country. " En año 1499 dieron orden los reyes católicos, para que los Moros se hiciesen cristianos : y así en Granada fué la mezquita mayor consagrada en iglesia catedral, y en ella y su comarca se bautizaron más de cincuenta mil personas ". MARIANA. *Hist. Gen. de España.* Footnote. Chap. 5. This account speaks of the conversion of " more than 50,000 persons " ; another contemporary writer says " more than 70,000 " e. g. " Los dichos Arzobispos y, la clerecía de Granada, convir-

with such persistence and severity that, by the middle of the 16th-century it was believed the desired object of ensuring that no Mohammedan remained within the boundaries of the peninsula had been attained (1). Yet there continued the suspicion that the conversions of the *Moriscoes* or "New Christians" as they were termed (2) were not altogether genuine and sincere, and further measures were introduced designed to completely obliterate any remaining tendencies which this unfortunate people might have endeavoured to retain of native habits of life or religion ; under the terms of the Edict of Philip II issued in 1566, *Moriscoes* were prohibited under severe penalties, from the use of language, books, ceremonies, clothing, or other signs of the customs or culture of their fäthers. The studied severity of these and similar injunctions had the effect of goading the unhappy people into open rebellion in 1568, but, though disturbed conditions persisted for some 3 years, the might and power of Spain triumphed, the Moors were subdued, and little or nothing further is heard of them during the remaining years that Philip II occupied the throne (3).

On the accession of Philip III (1598-1621) further crusades against the Moors were directed by the ecclesiastical authorities who

---

tieron la ciudad y bautisaron más de setenta mil personas grandes e chicas en Granada y su comarca". BERNÁLDEZ. *Hist. de los Reyes Católicos* concluding paragraph of Chap. 159.

(1) " L'année 1526 vit donc, disparaître dans toutes les parties de l'Espagne les signes extérieurs de l'Islamisme". *Histoire des Arabes d'Espagne*. M. DE CIRCOURT, vol. 2, Paris, 1846.

(2) " From this time (i. e. following the compulsory conversion of the Moors) the name of Moors, which had gradually superseded the primitive one of Spanish Arabs, gave way to the title of *Moriscos*, by which this unfortunate people continued to be known through the remainder of their protracted existence in the Peninsula". *Ferdinand and Isabella*, PRESCOTT. vol. II, p. 138. They were also contemptuously termed *Tornazidos*, i. e. turncoats or deserters. For further information see *Condición de los Moriscos en España*, JANER. Madrid, 1857. A contemporary writer says there were in Granada, at the end of the 14th century " sixty thousand households " e. g. " Afirman que había en tiempo del rey Bulhagiz en Granada, sesenta mil casas". *Los famosos Anales de la Corona de Aragón*. GERÓNIMO ZURITA. Book 20, Chap. 42, Edition Madrid, 1853.

(3) During this period numerous Moorish families and persons, either fled the country or were expelled therefrom. GONZÁLEZ remarks that by 1579 the revenue of Granada had diminished by over 17 millions of *maravedís*. According to his calculations upwards of 150,000 Moors must have left that kingdom during the period of insurrection.

firmly believed that the failure of such national enterprises as the Armada were indisputable evidence of the displeasure of the Almighty, that heretics and unbelievers should remain at large and undisturbed within the Kingdom. A movement led by the Archbishop of Valencia, and supported by the powerful Don Bernardo de Rosias y Sandoval, Archbishop of Toledo, begged the king to consent to the complete expulsion of the wretched remnants of the once magnificent Moorish nation. The decision was taken, and in 1609 the unfortunate victims of this inquisition were driven out of the country. Of the actual numbers concerned in this tremendous exodus, estimates and statements vary between wide limits. Nor are González's references particularly helpful, for the records he quotes are surprisingly meagre. One, obviously incomplete, mentions the numbers of households in the Kingdom of Aragon and Valencia ; the registers of embarkation he quotes, provide the following particulars :—

Port of Málaga	12,912	
Port of Cartagena	23,879	
Port of Sanlucar	18,566	
The Kingdom of Valencia	37,077	
Burgos	6,985	
Total . . .	99,419	
To these must be added 6 % for those who were allowed to remain in Spain	5,964	(In the record this is wrongly stated) 5,694
Embarkation, Alicante	12,275	
Grand Total. . .	117,658	Wrongly stated 117,388

A more complete statement gives the sames of towns and places in the Western and Eastern areas of the Kingdom of Valencia in 1609 together with the numbers of houses in each occupied by " Old Christians " (*Cristianos viejos*) and " New Christians " (*Cristianos nuevos*) (1). . . a total of 97,372 households. None of these statements or records is satisfying ; the numbers of Moors expelled at the

(1) The terms " New Christians ", " Half Christians ", " Part Christians " were applied to baptized Jews or Moors, and to relations of connections of these. See Laborde *Itinéraire Descriptif de l'Espagne* Vol. 1, Intro, LXXXVIII.

time enormously exceed any figures GONZÁLEZ places before us (1). It is scarcely conceivable that the two or three scanty statements quoted may be held to represent the whole of the documentary evidence preserved at *Simancas* relating to this most important episode in Spanish history. GONZÁLEZ might have settled for all time, by the presentation of copies of authentic and official papers, the conflicting estimates and statements claimed by various writers to represent the numbers of Moors expelled from Spain in the years 1609-1610.

The two succeeding records, relating to the year 1614, and the *Province of Guipúzcoa*, seem to have resulted from a judicial inquiry conducted by one *Hernando de Ribera*, and concerned with tax remissions in various towns throughout the Province. These investigations apparently led to the collection and compilation of numerous data relating to towns, hearths, and citizens in the area. ANTONIO DE OLABARRIA, Clerk to the Provincial Council of Guipuzcoa (*Escribano fiel de Junta desta provincia de Guipúzcoa*), must have been responsible for these returns, for he prepared a statement of the numbers of households paying hearth-taxes, and certified to 2,335 of these. In the second of these records, 26 towns were taken, and the numbers of tax-paying citizens and hearths determined, a step which enabled the estimation of the average numbers of tax-payers to hearths. It was found that in this limited inquiry, there were approximately 5 ½ tax-payers to each hearth. This ratio, applied to the 2,335 hearths recorded for the Province as a whole gave a total of 12,842 tax-paying citizens in the provincial area. But, each of these is then held to represent the head of a household of five persons, and therefore, there were estimated to be 12,842 × 5 (64,210) persons in the whole province, *excluding* nobles (2). With the exception of two statements compiled in 1629, concerned with

---

(1) LLORENTE says that over two millions of Jews and Moors left Spain e. g. " Con esta emigración, de los muchos Moros de Granada para Africa, y de cristianos para América perdimos entonces dos millones de almas que hoy serían ocho ". i. e. " by this emigration of numerous Moors from Granada to Africa and of Christians to América we lost two million souls ". *Historia Critica de la Inquisición de España.* JUAN ANTONIO LLORENTE. Madrid 1822. Tome II, Chap. VIII, Art. 1, para 7.

P. BORONAT *Los Moriscos españoles y su expulsión*, Valencia, 1901, might throw light on this question ; this is a work to which I have been unable to refer.

(2) According to a census taken in 1787, these numbered no less than 50,502, or 44 per cent of the estimated population of 1614.

the revenues of the Military Orders in Castile, and the numbers of Dioceses in the Kingdom (neither of which provide bases for estimation purposes) we have reached the last of the official documents of the 17th century quoted by GONZÁLES.

This sparsity of information touching conditions during the 17th century while regrettable is scarcely surprising ; it will be remembered the age of Spanish dominance ended with the death of Philip II in 1598, and thereafter decline followed with such amazing rapidity that, by the end of the 17th century Spain was mistress of the world no longer, but stripped of many of her possessions, and virtually a bankrupt nation ; such wide-scale national losses and disasters were sufficient in themselves to turn attention from the collection and compilation of data, to matters which, to the administrators of the time, were of more pressing importance. In these circumstances, it can hardly be expected that the 18th century will reveal evidence of any remarkable statistical activity, and if judgment is based upon the official documents quoted by GONZÁLEZ for that century, available information is exceptionally meagre.

In 1708 there was prepared a list of hearths from the register of houses in the Señorío (or Lordship) of Vizcaya compiled in 1704 ; the names of 113 towns are recorded as having 11,228 hearths (1) ; in 1768, according to ecclesiastical records the population of Castile was stated to number 6,689,875 souls. It was not, however, until 1787 that an actual census was carried out, when the population then enumerated numbered 10,035,957 persons, while a further census held 10 years later showed an increase to 10,574,940 persons.

The latter census (1797) was the last attempt in Spain at anything approaching a general census before the census taken on May 21st, 1857, since which year census taking at decennial intervals has been followed. Numerous estimates were made in the interim, in 1833, 1846, and 1850 ; the figures are of doubtful accuracy — if for example, the figures of 1850 are accepted, then the results of the census of 1857 show an apparent increase of something like 42 per cent in the course of seven years.

The researches of GONZÁLEZ brought to light many important,

---

(1) Other inquiries (*averiguaciones*) in various dioceses and ecclesiastical districts (*varias iglesias y anteiglesias*) gave the numbers of inhabitants in local areas in Vizcaya for the years 1659, 1616, 1618, and 1625. These returns relate, however, to 55 towns only.

and, so far as we know, hitherto unrecorded documents, thereby providing a valuable contribution to our knowledge of the Spanish people of earlier times. It seems clear from his accounts that, until the end of the 15th century, military rolls and tax lists were the principal sources of information ; in the 16th century these were supplemented by the addition of Hearth Tax Returns (1), Ecclesiastical Records (2) and so on, and that such records continued at irregular intervals until the taking of the census of 1787.

But, while we acknowledge the debt due to GONZÁLEZ, one is left with the impression that there remain unmentioned a large number of important documents of official and authentic character — ignored perhaps by reason of the fact that these had already some notice by other workers. The accounts of the population given by such early writers as ZURITA, MARIANA, BERNÁLDEZ, and others are vague and unsatisfactory ; the information they supply, unsupported by references to authentic or official documents, has given rise to the most absurd estimates relating to different periods of time. And yet, there is every reason to believe that dependable Spanish records *do* exist. It is unfortunate, therefore, to find that GONZÁLEZ fails to contribute further and more complete knowledge of the State and numbers of the Spanish people of early times, more exact information of the Jews and Moors, who, until the end of the 16th century constituted the most important industrial and commercial elements of the population of the country ; his one incomplete record relating to the Nobles of Spain is practically valueless having regard to the fact that, in Spain, the nobles were more numerous than in any other country in Europe — the entire populations of some districts were ennobled *en masse* in recognition of their valiant endeavours to repel the Moorish invaders, and it has been stated that in Biscay, Guipúzcoa, Asturias, and Alava, the nobility formed from one-sixth to one-half of the total population of those areas.

These concluding criticisms are not designed to belittle the endeavours and contributions of GONZÁLEZ. On the contrary, his work is worthy of the highest praise, and the omissions referred to arise from causes of which the present-day reader must necessarily remain ignorant. But other workers may taken up the unfinished

---

(1) Hearth Taxes were not introduced in England until the reign of Charles II. second half of the 17th century. 1685.

(2) Similar to the Bishops' Surveys of Tudor times.

task, and, by the exercise of sagacity and penetration, laying aside prejudices, partialities, or other biases, by refusing to accept rumours or vague statements, they may discover abundant and dependable information which will enable us to attain a proper appreciation of conditions in far-off times.

***

I am indebted to my friends Dr. M. Pascua of the Departamento de Estadísticas Sanitarias (Instituto Nacional de Higiene de Alfonso XIII) Madrid, and to Mr. A. K. Jameson of the Department of Spanish, King's College, University of London, for their valuable criticisms, suggestions, and friendly help. Dr. Pasqua made the preparation of this paper possible, by providing me with one of the scarce copies of González's work, thereby stimulating my curiosity and further interest in the early population records of Spain.

LEONARDO MELIADÒ

Il reddito privato degli Italiani nel 1928

Fra i tanti problemi che la guerra ha posto all'ordine del giorno per gli studiosi e gli uomini di governo, i calcoli della ricchezza e del reddito hanno assunto una particolare importanza. I risultati che da essi derivano, infatti, tendono a dare un'impressione sintetica delle condizioni economiche della nazione, e servono perciò utilmente a indirizzare gli atti di politica economica dei governi, sia nell'interno dello Stato, sia nelle relazioni con altri popoli. E ciò non è chi non veda quale enorme interesse assume, sotto i più svariati punti di vista. Anzitutto i governi evitano nei loro atti un inutile dispendio di energie in quanto sono più illuminati, meglio precisati gli obiettivi su cui convergere la loro azione ; e in secondo luogo aumentano considerevolmente, per ovvie ragioni, le probabilità di raggiungere gli scopi prefissi.

Per rilevare la grande importanza di tali calcoli basterebbe ricordare l'immediato periodo post-bellico in cui la sistemazione degli Stati usciti dalla guerra, la spinosa questione delle riparazioni e delle indennità, ha implicato l'esame della situazione economica di ciascuno Stato interessato e la valutazione della capacità, o meno, degli Stati sconfitti, di sostenere l'onere ad essi imposto dai trattati di pace e dagli accordi internazionali.

Inoltre, l'ansia che hanno i popoli di uscire dalla condizione di depressione e di disagio in cui la guerra li ha lasciati, li spinge a misurare più frequentemente, a mezzo di tali calcoli, i progressi compiuti, per poi trarne motivo non solo di soddisfazione, ma anche di incitamento a perseverare sempre più nello sforzo tenace che tende a ricostituire le immense ricchezze distrutte e a riconquistare quindi le agiate posizioni economiche di cui, prima della guerra, godevano.

Ma l'importanza dei calcoli della ricchezza e del reddito, e dei risultati che da essi derivano, esorbita dai confini, sia pure immensi, del campo strettamente economico, e si manifesta anche nel campo sociale.

Quando nell'immediato periodo del dopo-guerra abbiamo sentito il socialismo gridare ancora alla vecchia storia dello sfruttamento sempre più intenso del lavoratore e, viceversa, all'arricchimento sempre crescente del capitalista, non ci siamo forse ancora domandati: Ma come si distribuisce ora la ricchezza? È diminuita o è aumentata? Quali variazioni si sono verificate nella sua composizione? E quale è ora la distribuzione fra i diversi fattori della produzione? La guerra vi ha apportato, sì o no, delle variazioni? E a favore di chi?

Queste domande esigevano delle risposte, mentre gli avvenimenti incalzavano. E le risposte sono venute chiare, esplicite, nei calcoli eseguiti, e hanno dimostrato ancora una volta l'assurdità di certe teorie, la incapacità dei loro sostenitori, avidi solo di profittare delle gravi difficoltà del momento, create dalla guerra.

Problemi, dunque, quelli della ricchezza e del reddito, di grande importanza, teorica e pratica, e, come suol dirsi, di attualità. Questo spiega come ad essi, particolarmente in questi ultimi anni, si siano rivolti gli studiosi, facendo sorgere discussioni e polemiche che, insieme all'interesse pratico, investirono a volte anche l'interesse scientifico.

In Italia, le fortunose vicende subìte dalla nostra economia hanno invogliato valorosi competenti a osservare con ripetuti calcoli le ripercussioni sulla ricchezza e sul reddito. E, invero, tali studi hanno apportato contributi notevoli di nuove idee, di nuovi metodi che son valsi, fra l'altro, a rendere meno incerta e inesatta la soluzione dei difficili problemi.

A quest'ultimo ventennio è legato il nome di un illustre scienziato nostro — il Gini — il quale al calcolo del reddito, come già a quello della ricchezza, diede nuovo impulso esaminando la questione oltre che dal punto di vista teorico metodologico anche dal punto di vista della praticità e della reale portata dei risultati conseguiti. I suoi calcoli, scientificamente rigorosi nei metodi, attendibilissimi nei risultati, sono stati, e sono tuttavia, il punto di riferimento dei più importanti studi in materia venuti in seguito.

Non sempre però i criteri, su cui i diversi autori si sono basati, sono stati esatti, e non sempre si è tenuto il debito conto di elementi

nuovi, di nuove circostanze che possono essere intervenute nello spazio di tempo intercorso fra un calcolo e l'altro. Ed è accaduto perciò, spesse volte, che o si è deviato del tutto dalla realtà, o, nei risultati, si sono raggiunte cifre che se, a prima vista, possono sembrare attendibili, d'altra parte però, sottoposte a controlli e verifiche, non dànno eccessivo affidamento.

I calcoli del reddito in Italia.

Il periodo che va dalla costituzione del Regno ad oggi è stato, per il nostro paese, un periodo sommamente importante, sotto i più svariati punti di vista. Specialmente dal lato economico, esso ha segnato una fase che, in generale, può dirsi di rapido, intenso sviluppo, nonostante non siano mancati i periodi di crisi e di stasi.

Particolarmente interessanti, e anche numerosi, sono stati perciò i calcoli diretti a misurare le variazioni della ricchezza e del reddito, le variazioni, cioè, dei due più importanti fenomeni economici, in cui si condensano le risultanti, gli effetti di quasi tutti gli altri fenomeni. E, sebbene i risultati ottenuti non siano tutti perfettamente paragonabili nel tempo, sia perchè bisognerebbe tener conto delle variazioni del potere d'acquisto della moneta, sia perchè i risultati ottenuti in questi ultimi anni sono da considerarsi molto più attendibili per i migliorati metodi d'indagine e di calcolo, tuttavia essi servono ugualmente a darci l'impressione, sia pure non precisa, delle rapide variazioni, nel senso dell'aumento, verificatosi nella ricchezza e nel reddito degli Italiani.

I primi calcoli risalgono al 1860, nel quale anno, secondo il Santoro (1), il reddito degli Italiani ammontava a 3.910 milioni di lire al lordo, e a 1.435 al netto, di contro ad una ricchezza calcolata dallo stesso autore in 35.425 milioni. La proporzione in cui, secondo queste cifre, starebbero reddito e ricchezza, appare evidentemente troppo bassa. Del resto lo stesso A., mentre riteneva la cifra della ricchezza sufficientemente attendibile, reputava, invece, quella relativa al reddito molto lontana dalla realtà.

Il Tivaroni (2), per lo stesso anno, riteneva invece che, a una

---

(1) M. Santoro. *L'Italia nei suoi progressi economici dal* 1860 *al* 1910. Roma, 1910, Tip. Popolare.

(2) J. Tivaroni. *Contribuzioni e reddito dei privati in Italia dalla proclamazione del Regno ai giorni nostri.* Rivista « Metron » Vol. VI, n. 2.

ricchezza di 35,6 miliardi, corrispondesse, nella proporzione del 17-18 %, un reddito di 5,8-6,2 miliardi di lire.

Per gli anni posteriori, il TIVARONI, accogliendo la ripartizione fatta dal DE JOHANNIS e debitamente integrandola in modo da comprendere anche gli anni del periodo post-bellico, divide la vita economica-finanziaria italiana in sei periodi, per ognuno dei quali calcola, seguendo quasi sempre criteri uniformi, l'ammontare del reddito e della ricchezza.

Trova così che, nel 1876, a una ricchezza di 42,1 miliardi corrisponde un reddito di circa 9-10 miliardi, che rappresenta, sulla ricchezza, una percentuale superiore di molto al 17-18 %.

Nel 1887 il reddito degli Italiani sarebbe stato di 11-12 miliardi, contro una ricchezza di quasi 58 miliardi, e si sarebbe mantenuto stazionario, come la ricchezza stessa, anche alla fine del terzo periodo, cioè nel 1892.

Nel 1898 sarebbe, invece, lievemente aumentato a 13 miliardi, mentre la ricchezza risulterebbe diminuita a 56,1 miliardi.

Per il penultimo periodo che arriva sino al 1914, cioè per il periodo pre-bellico, il TIVARONI accetta le valutazioni del Prof. GINI, sia per la ricchezza (111 miliardi), sia per il reddito (19-20 miliardi) e spiega la fortissima differenza che si riscontra tra questi risultati e quelli del periodo precedente, dicendo che il metodo dell'intervallo devolutivo da lui adoperato per calcolare la ricchezza « divergeva tanto più dalla realtà, quanto più, nel decorso del tempo, cresceva il saggio delle imposte sulle successioni, e la percentuale dei beni mobili, più facilmente occultabili, nel complesso dei beni componenti le successioni e le donazioni » (1).

Ciò può essere vero. Ma l'inconveniente era facilmente eliminabile elevando gradatamente la quota di evasione. Senonchè, così facendo, si sarebbe arrivati a un punto in cui si sarebbe dovuto ammettere una quota di evasione altissima e in contrasto con le comuni vedute degli studiosi al riguardo, i quali, invece, l'ammettono nella misura media del 50 %.

In realtà, però, noi crediamo che il difetto stia nell'essenza stessa del metodo dell'intervallo devolutivo, il quale, dopo l'acuta disamina e la severa critica che ne fece il Prof. GINI (2) dovrebbe

(1) J. TIVARONI. *Contribuzioni e reddito*, ecc. op. cit. pag. 186-187.

(2) C. GINI. *L'ammontare e la composizione della ricchezza delle nazioni*. Torino, F.lli Bocca, 1914.

ormai, per dirla con lo ZINGALI, « esser posto fra i ferri vecchi degli economisti e degli statistici » (1).

Per quanto riguarda il reddito osserviamo, invece, che il TIVARONI vi giunge, per quasi tutti i periodi considerati, determinandolo in base alla proporzione del 17-18 % della ricchezza, e sia pure apportando delle modificazioni ai risultati. Il TIVARONI si basa, cioè, sul rapporto tra patrimonio e reddito, stabilito dal prof. GINI nel 1925.

Ma per la stessa ragione per cui tale rapporto non è uguale per tutte le nazioni in un determinato periodo, essendo in dipendenza della ricchezza accumulata, del grado di sfruttamento delle risorse, della popolazione, ecc., in dipendenza cioè dello stadio più o meno avanzato delle condizioni economiche di ciascuna nazione, così, tale coefficiente non può ritenersi sempre uguale attraverso il tempo e per tutti gli stadi attraversati dall'economia della nazione considerata.

Che reddito e ricchezza, dunque, stiano, come risulta dai calcoli del prof. GINI per il periodo prebellico, nella proporzione del 17-18 % ci sembra ed è attendibile, anche perchè questa ipotesi è avvalorata dai numerosi calcoli di controllo a cui i risultati del Prof. GINI sono stati sottoposti da eminenti statistici ed economisti, italiani e stranieri. Ma che tale proporzione si sia verificata dal 1861 a oggi, non ci pare un'ipotesi molto fondata, in quanto bisognerebbe implicitamente ammettere che, in sì lungo periodo, lo stato economico dell'Italia non abbia avuto alcuna variazione, nè tampoco un miglioramento. Niente quindi di quei progressi tecnici verificatisi su larga scala in tutte le branche dell'attività economica dalla costituzione del Regno ad oggi ; nessuna ripercussione avrebbe apportato il sorgere e l'affermarsi dell'industria in un paese, come il nostro, prevalentemente agricolo ; nessun cambiamento nelle condizioni in cui si è venuto a trovare il mercato del lavoro ; nessuna variazione, infine, nella remunerazione del capitale, del lavoro e degli altri fattori cooperanti alla produzione. Ecco alcuni degli elementi di cui bisogna tener conto nel determinare il rapporto tra patrimonio e reddito, elementi sostanziali, importantissimi e affatto trascurabili.

Anche per l'ultimo periodo 1924-25, il TIVARONI accetta integralmente i risultati dei calcoli del Prof. GINI, sia per la ricchezza, fissata

---

(1) G. ZINGALI. *Sull'ammontare della ricchezza privata in Sicilia*, Estratto dagli « Atti della Società per il progresso delle Scienze ». Riunione di Catania, aprile 1923, pag. 1.

in 550 miliardi per il 1925, sia per il reddito, fissato in 100 miliardi per lo stesso anno (1). Per quest'ultimo risultato, però, osserva che forse deve ritenersi alquanto inferiore al vero, specialmente per quanto si riferisce al reddito dell'agricoltura che egli ritiene non inferiore ai 40 miliardi, mentre il Prof. GINI lo aveva fissato a 32.

Oltre ai calcoli del reddito e della ricchezza per il 1924 e per il 1925, di cui già abbiamo detto, il Prof. GINI, eseguì, per altri anni, diverse altre valutazioni riferentisi ora al reddito, ora alla ricchezza, separatamente.

Nel 1908 egli, infatti, valutava la ricchezza privata italiana ad almeno 80 miliardi (2) e, per lo stesso anno, stabiliva nel 1914 un reddito di 14 miliardi. Quest'ultimo risultato non fu però pubblicato dall'autore, ma fu accennato invece, senza indicarne il procedimento, dal Prof. ALFREDO ROCCO, in una conferenza che ebbe larga eco nella stampa (3).

Nel 1917 abbiamo un altro calcolo della ricchezza, eseguito in occasione della valutazione dei danni di guerra, con un risultato di 120 miliardi (4).

Nel febbraio 1918, fondandosi sul risultato del 1908, egli eseguiva una nuova valutazione del reddito degli Italiani nel 1914, giungendo, con metodi diversi, ai risultati che furono poi confermati dai calcoli eseguiti, per lo stesso anno, nel 1925 (5).

Nel 1921, in occasione di una polemica, sorta per aver l'On. BENEDUCE, parlando alla Camera, stimato il reddito degl'Italiani a 70 miliardi, il Prof. GINI rifaceva con diversi metodi il calcolo del reddito per il 1914, in base a cui poi, tenendo conto dei nuovi elementi sopravvenuti e delle mutate condizioni economiche e finanziarie del nostro paese, stabiliva che il reddito degli Italiani nel 1921 poteva essere posto tra 100-160 miliardi. Limiti questi tra loro molto distanti, ma sufficientemente giustificati da positive considerazioni

---

(1) C. GINI. *A comparison of the wealth and national income of several important nations, before and after the war.* Provveditorato Generale dello Stato, Roma, 1925.

(2) C. GINI. *L'ammontare e la composizione della ricchezza delle nazioni.* Torino, Bocca, 1914.

(3) C. GINI. *A quanto ammonta il reddito degli Italiani?* in « Tempo Economico », 5 gennaio 1921.

(4) C. GINI. *Problemi sociologici della guerra.* Zanichelli, Bologna, 1921.

(5) C. GINI. *La leva del capitale,* in « Tempo Economico », 3 febbraio 1918.

sulla instabilità della situazione economica dell'immediato periodo post-bellico (1).

Vasto e largo appare dunque il contributo apportato da questo scienziato nostro a problemi così complessi e laboriosi come quelli che si riferiscono alla ricchezza e al reddito delle nazioni. I metodi di cui egli si è servito nei suoi calcoli sono vari e semplici, servono di controllo rigoroso l'uno all'altro, e appaiono, di volta in volta, i più adatti alle particolari condizioni del momento in cui il calcolo è eseguito.

Per quanto riguarda i metodi adoperati per il calcolo del reddito distinguiamo: un primo metodo, che è poi quello frequentemente adoperato dal TIVARONI e da molti altri, consiste nel determinare il reddito in base al rapporto, tra patrimonio e reddito. Un secondo metodo consiste, invece, nello stabilire la quantità di reddito che la popolazione italiana spende per l'alimentazione e per altre spese, e da questo risalire al reddito totale mediante l'aggiunta di quella parte di reddito che va a incrementare la ricchezza, mediante, cioè, l'aggiunta del risparmio. Un terzo metodo più analitico consiste nel determinare il valore dei prodotti in ogni branca dell'economia, il valore dei servizi resi dalle varie categorie professionali, escludendo quelli resi nell'ambito della famiglia, e nell'accertare infine l'entità del rendimento di alcuni altri cespiti di ricchezza. Un quarto metodo ancora cerca di risalire all'ammontare totale del reddito, valutando la produzione agraria e determinando per varie vie il rapporto che questa può rappresentare sopra la produzione complessiva (2).

Questi metodi di indagine, scientificamente rigorosi, sono apparsi perfettamente aderenti alla realtà, come del resto stanno a dimostrare i risultati ottenuti dalla loro applicazione.

Oltre ai calcoli del Prof. GINI e a quelli del TIVARONI su ricordati, esistono per il periodo post-bellico diversi altri calcoli, i cui risultati, però, sono spesso o eccessivamente alti o eccessivamente al di sotto del vero e, ad ogni modo, discordi tra loro, anche se riguardano uno stesso periodo. Ciò, oltre tutto, dipende anche dal fatto che, se da un lato è vero che nel periodo post-bellico il calcolo del reddito può essere più agevole a farsi che non il calcolo della ricchezza, d'altra parte, però, non è men vero, che esso non sia più difficile a farsi

---

(1) C. GINI. *A quanto ammonta il reddito degli Italiani?* In «Tempo Economico», 5 gennaio 1921.

(2) C. GINI. *A quanto ammonta...* Art. citato.

che nel periodo pre-bellico. Mentre, infatti, pur essendo un fenomeno economico essenzialmente dinamico, il reddito, nel periodo pre-bellico, si presentava con una certa regolarità che permetteva di individuarlo e di misurarlo, nel periodo post-bellico, invece, per le condizioni di instabilità di tutta l'economia, il calcolo è reso, in un certo senso, aleatorio, riuscendo oltremodo difficile, per la complessità stessa del fenomeno, determinare l'entità del reddito con sufficiente approssimazione, per un periodo ben precisato.

Ma a parte tutto, noi crediamo siano discordi, riguardo ai risultati conseguiti nei vari calcoli, anche i pareri di quegli studiosi i quali, senza occuparsi di proposito del problema, trovano modo di postillare questo e quel calcolo, del tale o del tal altro autore, limitandosi a manifestare la propria opinione, favorevole o meno, senza peraltro giungere a una conclusione che valga a gettare nuova luce o a portare un nuovo contributo alla questione.

Di tali risultati, conseguiti nel periodo attuale, ricordiamo qui quelli del Basso (1) che attribuiva 50 miliardi di reddito alla sola agricoltura, con evidente esagerazione; quelli del Porri (2) aggirantisi in complesso intorno ai 100 miliardi per la stessa epoca; e quelli del Dott. A. Sacerdote (3) per il 1926-27 in 90-110 miliardi. Il Mortara (4), giudicata attendibile la cifra di 20 miliardi per l'immediato periodo pre-bellico, stimava il reddito degli Italiani a 90 miliardi per il 1923-24, a 90-100 per il 1924-25, a 100-110 per il 1925-26, e a 90 ancora per il 1927-28.

Fermeremo ora la nostra attenzione su un recente calcolo del Prof. Boldrini per il 1927-28 (5), calcolo che, per l'ingegnosità del metodo seguito, offre un particolare interesse.

Il Boldrini, dunque, basandosi sulla valutazione del reddito

---

(1) L. Basso. *Il reddito totale degli Italiani*, in « Critica Sociale », 1-15 dicembre, 1923.

(2) V. Porri. *Intorno al reddito privato in Italia*, Estr. da « Giornale degli Economisti », n. 16-17, Roma, 1925.

(3) A. Sacerdote. *Ricchezza e reddito privati in Italia*, Pinerolo, 1928, Un. Tip. Pinerolese.

(4) G. Mortara. *Prospettive Economiche*, 1922 e segg. *La ricchezza nazionale, il reddito nazionale e la pressione tributaria*, in « Movimento Economico Italiano », Banca Commerciale, 1927.

(5) M. Boldrini. *Il reddito privato degli Italiani nel* 1928, in « Commercio », n. 8, agosto 1929.

per il 1925 fatta dal Prof. GINI (1) in occasione degli studi preparatori per la sistemazione dei debiti interalleati verso gli Stati Uniti e l'Inghilterra, arriva per il 1927 a una cifra di 78 miliardi di reddito totale privato, che porta poi a 80 miliardi per il primo semestre del 1928, in considerazione di un miglioramento verificatosi in tale periodo nella situazione economica italiana.

Egli, cioè, sui 100 miliardi e più che il Prof. GINI dava per il 1925, opera una riduzione di più di 20 miliardi, osservando che nello stesso periodo un movimento di diminuzione del reddito si è verificato anche nei più importanti paesi europei, fra i quali il BOLDRINI considerava particolarmente l'Inghilterra, il cui reddito da 4.230 milioni di sterline nel 1924, secondo BOWLEY e STAMP, è sceso a 4.000 nel 1925, a 3.700 nel 1926, per risalire di nuovo alla cifra di tre anni innanzi nel 1927. Ma prescindendo dalla possibilità o meno di un paragone, nei riguardi del reddito, fra due economie quali quella inglese e quella italiana (si pensi alla profonda diversità fra le due economie, l'una prevalentemente agricola, l'altra essenzialmente industriale; e si pensi alle vicende dei due paesi dal 1925 al 1928; crisi di rivalutazione della moneta in Italia; sciopero minerario in Inghilterra), noi, osservando i risultati del calcolo del BOLDRINI e paragonandoli con quelli del Prof. GINI per il 1925, troviamo che i 20 miliardi e più di diminuzione attribuiti al reddito degli Italiani dal 1925 al 1927 sono quasi tutti a carico delle due principali categorie di reddito, e cioè a carico del reddito agricolo e di quello industriale, come può rilevarsi dallo specchietto seguente nel quale, per maggior comodità di osservazione, diamo anche gli altri risultati parziali dei due calcoli.

	1925 (Gini)	1927 (Boldrini)
Redditi agricoli, forestali ecc.	32	23
Redditi industriali	36	25
Commercio e credito	11	10
Impieghi pubblici, privati e simili . . .	11	10
Redditi d'immobili urbani	4	4
Titoli; eccedenza dei redditi ricevuti dall'estero su quelli trasferiti all'estero . . .	6	6
Totale miliardi . . .	100	78

(1) C. GINI. *A comparison of the wealth and national income of several important nations, before and after the war*, Roma, 1925, Provveditorato Generale dello Stato.

Mentre, dunque, i redditi dell'agricoltura e delle industrie ammontavano rispettivamente a 32 e 36 miliardi secondo il prof. GINI, secondo il BOLDRINI sono scesi, invece, a 23 e a 25, con una diminuzione cioè del 27 % per il reddito agricolo e del 31 % per quello industriale.

Il Boldrini giunge a questo risultato basandosi su certi indici della produzione agricola e industriale, calcolati da un autore francese, il DESSIRIER (1), per gli anni dal 1870 al 1927. Combinando gli indici della produzione agricola, per i due anni 1925 e 1927 col rispettivo indice del livello dei prezzi delle derrate alimentari, in ciascuno dei due anni, assunto come indice dei prezzi dei prodotti agricoli, e combinando, poi, gli indici della produzione industriale col rispettivo indice del livello dei prezzi delle materie industriali, pure in ciascuno dei due anni, il BOLDRINI ottiene per il 1927, facendo uguale a 100 i risultati del 1925, due nuovi indici (uno per la produzione agricola e uno per quella industriale) in base a cui poi fa variare proporzionalmente il reddito delle due categorie, fissato rispettivamente in 32 o 36 miliardi dal Prof. GINI, per il 1925, come già sappiamo.

Senonchè questo procedimento, che pur potrebbe sembrare impeccabile logicamente, appare però insufficiente e forzatamente difettoso all'applicazione pratica. Esso, infatti, per la sua stessa natura, è troppo rigido e schematico e non può quindi tener conto convenientemente di tutti gli elementi che costituiscono la dinamica di un fenomeno economico così complesso quale è il reddito. Inoltre, essendo basato essenzialmente su indici sintetici della produzione, ha tutti i difetti di questi indici senza poterne avere i pregi. Tali indici, infatti se pur possono utilmente servire, presi a sè, a mostrare in certo modo, e sempre relativamente, la tendenza della variazione più o meno buona o sfavorevole di un'annata rispetto a un'altra, non possono però assolutamente, nello stadio di elaborazione in cui ancora si trovano, servire a fissare con precisione ed esattezza, come sarebbe stato necessario nel caso del reddito, i limiti entro cui la variazione si è verificata.

D'altra parte, indici di tal genere, quali quelli del DESSIRIER, vanno incontro nell'elaborazione, a difficoltà numerose e di vario genere, talvolta anche insormontabili. Anzitutto essi non possono tener

(1) J. DESSIRIER. *Indices comparés de la production industrielle et de la production agricole en divers pays de* 1870 *à* 1927. — Bulletin de la « Statistique Générale de la France », tome XVIII, fasc. I, 1928, pp. 65-110.

conto che di una parte soltanto della produzione totale e non sempre della maggior parte e della più importante. In secondo luogo, i vari indici parziali elaborati per le varie branche dell'attività produttiva, da cui poi derivano gli indici sintetici generali, spesso non possono rappresentare alcune categorie di produzione che solo indirettamente, in base cioè ad altre manifestazioni della attività produttiva stessa, manifestazioni che, agli effetti della determinazione della produzione, non sempre hanno quel valore e quel significato che sarebbe necessario, variando questo a seconda del momento in cui le manifestazioni si verificano, e a seconda delle particolari condizioni di questo o quel mercato. Vediamo, infatti, che negli indici del DESSIRIER per la produzione industriale le industrie tessili sono rappresentate solo in base al consumo del cotone e della lana ; le industrie meccaniche in base a quello dell'acciaio, e così via.

Ora, senza dubbio, in un periodo normale, un tale procedimento può essere appropriato, se pure non sempre, e l'indice risultante può avere un certo valore sintomatico. Ma in periodi punto normali, come quelli che abbiamo attraversato e stiamo tuttavia attraversando nel dopo guerra, in periodi cioè in cui i vari mercati sono più sensibili ai vari e rapidi mutamenti di congiuntura, e sono più soggetti a frequenti sbalzi, cadute e riprese improvvise, il valore e il significato dell'indice « consumo » o di altre manifestazioni indirette della attività produttiva, viene ad essere di molto attenuato e ridotto, non potendo essere più considerato la logica conseguenza dell'attività, potendo, invece, essere la risultante di un cumulo di altri fattori, su cui gioca non poco anche il fattore psicologico.

Tutto ciò si verifica in misura diversa nei vari mercati e per le varie industrie.

È chiaro, infatti, che il consumo di questa o quella materia prima, per la tale o la tal'altra industria, è sopratutto in dipendenza del fatto se il paese consumatore è o non è produttore o importatore. Se è produttore, allora l'indice « consumo » può avere qualche valore, in quanto, è logico, che in questo caso il paese consuma realmente ciò di cui ha bisogno, avendolo a disposizione, e non dovendo sottostare a condizioni che ne regolano l'acquisto in altri paesi. Nel caso contrario, cioè nel caso in cui il paese consumatore sia prevalentemente importatore, la questione assume aspetto diverso : l'importazione, infatti, non è già solo in diretta correlazione col bisogno ; essa è in dipendenza anche di numerosi altri fattori quali le oscillazioni dei dazi doganali, e sopratutto in dipendenza della previsione di un prossimo rialzo o di una

prossima caduta dei prezzi. Nel primo caso, infatti, può accadere che l'importazione aumenti considerevolmente, senza che per questo debba anche aumentare l'attività delle industrie e quindi la produzione. L'eccedenza al fabbisogno normale andrà invece a ingrossare gli stocks e le giacenze, che serviranno poi ad alimentare l'attività produttiva in un periodo posteriore. Nel secondo caso, cioè, in previsione di una prossima caduta di prezzi, l'importazione si ridurrà al minimo necessario; ma non potrà con ciò dirsi che anche l'attività produttiva debba necessariamente ridurre il suo ritmo, il quale, invece, potrà continuare ad essere alimentato, almeno per un certo tempo, dagli stocks o dalle giacenze accumulate.

Questo gioco di azioni e di reazioni si verifica in periodi più o meno lunghi, e non può quindi risultare compensato negli indici del DESSIRIER, i quali, essendo annuali, non possono dare che un'impressione molto relativa, se non errata, dell'intensità dell'attività produttiva in quel determinato anno.

Inoltre, v'è da notare, gli indici del DESSIRIER sono stati costruiti per sette nazioni contemporaneamente e sono basati perciò su elementi comuni a quasi tutti i paesi considerati. Ciò, evidentemente, influisce in modo sensibile sul valore e sul significato degli indici generali ricavati, in quanto l'importanza che ciascun elemento preso in considerazione ha nel complesso della produzione, industriale o agricola, varia da paese a paese. Vediamo così che il DESSIRIER, per calcolare l'indice della produzione industriale per l'Italia, considera solo cinque specie di industrie (minerarie, metallurgiche, meccaniche, tessili e chimiche) e lascia, per es., da parte l'industria elettrica, la quale, se non ha eccessiva importanza per qualche altra delle nazioni considerate, ne ha invece una grandissima per il nostro paese.

Lo stesso avviene per quanto riguarda la produzione agricola. Il DESSIRIER, infatti, dai prodotti considerati, esclude l'olio e gli agrumi, che mentre per l'Italia hanno un'importanza per nulla trascurabile, non ne possono, invece, avere alcuna ad es. per l'Inghilterra e per la Germania.

E così vediamo anche che egli, eccezion fatta per l'Inghilterra, non considera per nessun paese i prodotti del bestiame e, solo per alcuni, i foraggi. Per l'Italia non considera nè gli uni nè gli altri, sicchè oltre ad essi, agli agrumi e all'olio, restano esclusi anche i prodotti di alcune piante industriali, i legumi, gli ortaggi, le frutta varie, e, infine, tutta la non irrilevante produzione boschiva-forestale.

In più, poi, i prodotti su cui egli si basa (frumento, segale, orzo, avena, riso, granoturco, patate, semi di lino, vino, tabacco) oltre a non essere tutti i più importanti della nostra produzione agricola, sono anche in numero limitatissimo, dieci appena. Ciò può costituire e costituisce un altro elemento di perturbazione nel calcolo dell'indice generale, in quanto non attenua, nè tampoco elimina l'accidentalità del fattore climatico, il quale, come è risaputo, mentre da un lato può esercitare un'influenza favorevole su questo o quel prodotto, può, dall'altro, contemporaneamente, arrestare, ridurre, danneggiare la produzione di questa o quella coltura. Ad aggravare questa circostanza concorre, inoltre, anche il fatto che buona parte dei prodotti considerati dal DESSIRIER sono costituiti da cereali, sui quali, come del resto su qualsiasi altro tipo di coltura, l'influenza delle vicende atmosferiche è uniforme. Sicchè, se per caso un'annata si è presentata sfavorevole per i cereali soltanto, l'indice che se ne è ricavato, essendo costruito in buona parte appunto sulla produzione cerealicola, accusa un peggioramento, che in realtà può non esistere o addirittura essere miglioramento, in quanto le altre colture possono o non aver sofferto, o, anche, essere state avvantaggiate da quelle vicende atmosferiche che invece hanno influito sfavorevolmente sulla produzione dei cereali. A tutto ciò, infine, si aggiunga, come elemento contingente, il fatto che i dati del 1927, sui quali il DESSIRIER ha costruito l'indice di cui si è poi servito il BOLDRINI, erano ancora provvisori, all'epoca in cui l'indice stesso è stato elaborato.

Le stesse difettosità nella scelta, nel valore e nel significato degli elementi rappresentativi della produzione, si possono riscontrare, dove più e dove meno, nel procedimento per il calcolo dell'indice della produzione industriale, a proposito del quale, oltre quanto già sopra abbiamo detto, v'è da notare in particolare che il DESSIRIER, avendo fatto uguale a 100 il 1913, e avendo scelto come peso, per la media ponderata degli indici parziali delle diverse categorie d'industrie, il numero degli operai occupati in ciascuna industria nel 1913, non ha potuto apportare ai dati del 1913, come egli stesso osserva, che delle modificazioni incomplete e molto inesatte, per poter tener conto dei cambiamenti territoriali verificatisi colla guerra. Ma anche se le modificazioni apportate avessero potuto essere meno inesatte, non per questo l'indice generale che poi se ne sarebbe ricavato avrebbe avuto maggior valore, in quanto è ben noto quale attendibilità e quale sicurezza possono dare, a tale scopo, le statistiche eseguite in quel tempo, sull'occupazione e sulla disoccupazione operaia.

Per tutte queste considerazioni non crediamo, dunque, che gli indici del DESSIRIER, sia per la produzione agricola, sia per quella industriale, siano adatti ad imbastire agevolmente su di essi un calcolo del reddito. È questo un problema, oltre che laborioso e complesso, delicatissimo, in quanto, come già sopra abbiamo detto, tende a dare in un'unica cifra l'impressione sintetica delle condizioni economiche della nazione e non può quindi servirsi di impressioni vaghe e incerte quali possono essere quelle date dagli indici del DESSIRIER, ma deve, invece, poggiare su basi più solide e più sicure.

Questo spiega, in ultima analisi, come il calcolo del BOLDRINI, basato appunto su tali indici, pur accusando nel risultato la diminuzione del reddito degli Italiani, poichè dal 1925 al 1927 una diminuzione c'è stata, è lontano però dal vero in quanto attribuisce a tale diminuzione un'intensità eccessiva, che non può avere avuto.

IL REDDITO DELL'AGRICOLTURA.

Le prime fondate ricerche statistiche tendenti a stabilire il valore lordo e netto della produzione dell'agricoltura italiana sono, si può dire, relativamente recenti.

Lo stato di abominevole abbandono in cui si trovavano quasi tutti i catasti italiani ; le profonde diversità di criteri, di metodi, oltre che di misure, che li caratterizzavano in ciascuno degli antichi stati ; la mancanza assoluta di un qualsiasi ufficio di statistica agraria ; l'estrema difficoltà di raccogliere dei dati che presentassero qualche omogeneità, ne sono state le cause principali. Col rapido progresso dell'agricoltura, dalla costituzione del Regno ad oggi, questo stato di cose è venuto via via migliorando, se pure ancora non in tutto, permettendo così agli studiosi di rivolgere la loro attenzione a un problema di grande interesse per la vita economica stessa della Nazione, basata essenzialmente sull'agricoltura.

Alla prima valutazione del MAESTRI, che risale al 1864 (1) e nella quale il valore lordo della produzione agricola è fissato in una cifra di poco meno di 3 miliardi, confermata più tardi dal JACINI, numerose altre ne sono eseguite, e con risultati il cui grado di attendibilità è venuto sempre crescendo.

---

(1) *Annuario Statistico Italiano* a cura di C. CORRENTI e P. MAESTRI, anno II, 1864, Torino, Tip. Letteraria, 1864.

Ricorderemo qui le valutazioni ufficiali del 1884 e del 1886, fissate rispettivamente in 4.380 e 4.653 milioni, e riportate negli Annuari statistici dei due anni ; e quelle del 1895 e del 1904 che hanno dato un risultato rispettivamente di 4.385 e 4.910 milioni, ritenuto però inferiore al vero.

Ricorderemo poi anche i risultati di privati studiosi, quali l'Amì che giunse per il 1879 a una cifra di 4.152 milioni (1), e il De Johannis che stabiliva per il 1889 un valore della produzione agricola di oltre 5 miliardi (2). Il Mazzini eseguì il calcolo, ripartendo il valore della produzione per provincie e regioni, e giunse, per il 1887, a una cifra di 4.582 milioni e più (3).

Per il 1890, il Bodio, poco allontanandosi dalle valutazioni ufficiali, calcolava un valore di oltre 5 miliardi (4), confermato poi da altri studiosi quali il Tivaroni (5) e il Jacini, che ne ritraevano il reddito netto in 2 miliardi e mezzo.

Una valutazione che suscitò numerose critiche fu quella ufficiale, compiuta nel 1911 dal nuovo Ufficio di statistica agraria sotto la direzione del Valenti, e pubblicata nell'Annuario Statistico di quell'anno. Tale valutazione toccava la cifra complessiva di 7 miliardi, segnando così un incremento notevole, per più di due miliardi, rispetto al risultato, in poco meno di 5 miliardi, raggiunto dalla precedente valutazione ufficiale del 1904.

Per l'immediato periodo pre-bellico, altre valutazioni degne di nota sono quelle del Santoro per il 1911, il cui risultato corrisponde a quello della valutazione ufficiale dello stesso anno (6) ; quella del Tamaro per il 1913 (7) che dà una cifra di poco inferiore ai 9 miliardi ;

---

(1) S. Amì. *La perequazione dell'imposta sui terreni e le sue applicazioni alla riforma tributaria.* Torino, Roux e Favalle, 1879.

(2) De Johannis. *Proposta di studi statistici sull'agricoltura italiana,* in « Atti della Reale Accademia dei Georgofili di Firenze », Quarta serie, Vol. XII, 1889.

(3) Mazzini. *L'imposta fondiaria e il reddito netto nell'agricoltura,* in « Atti della Reale Accademia dei Georgofili di Firenze », Quarta serie, Vol. XIII, 1890.

(4) L. Bodio. *Di alcuni indici misuratori del movimento economico in Italia,* II^{a} edizione, Roma, 1891.

(5) J. Tivaroni. *Patrimonio e reddito di alcune nazioni civili,* Torino, Roma, 1901.

(6) M. Santoro. *L'Italia nei suoi progressi economici dal* 1860 *al* 1910. Roma, 1911.

(7) D. Tamaro. *Trattato completo di agricoltura,* 2^{a} edizione, vol. I, Milano, Hoepli, 1922.

quella del SERPIERI, pure per lo stesso anno, che giunge però a un risultato più basso: 7,8 miliardi (1); quella del BORDIGA per il 1914 che arriva a 10 miliardi e 300 milioni (2); e infine quella del LANINO per il 1913 che dava un valore di oltre 8 miliardi (3).

Attraverso i risultati di queste valutazioni, sia pure ottenuti con i criteri e i metodi più disparati, si nota chiaramente il costante rapido progresso compiuto dalla nostra agricoltura, dalla costituzione del Regno ad oggi; e ci è parso opportuno riportarli perchè meglio possa apparire il distacco dal periodo post-bellico, durante il quale, reagendo validamente alle influenze sfavorevoli, la nostra agricoltura ha continuato, sia pure con ritmo più lento, a progredire.

Le valutazioni del periodo post-bellico si differenziano nettamente da quelle pre-belliche per le cifre altissime da cui sono caratterizzate e che sono dovute al forte deprezzamento della moneta e al conseguente rialzo dei prezzi. Esse quindi non sono paragonabili con quelle d'anteguerra se non tenuto il debito conto di questo elemento fondamentale.

Ricordiamo qui le più importanti, quali quella del CARLUCCI, che si riferisce al triennio 1920-22 e dà come risultato un valore di 35.600 milioni o 40 miliardi, a seconda che si tratti della produzione sul campo o sui mercati di vendita (4). Il BORDIGA per lo stesso periodo giungeva a un risultato di oltre 36 miliardi, circa 8 in moneta prebellica (5). L'Ing. ZATTINI, calcolando in base ai prezzi del 1913 la produzione agricola media annua nel periodo 1909-24 stabiliva un valore di 8 miliardi e 245 milioni circa, vale a dire un valore, in lire del 1928, di poco più di 42 miliardi (6). In questo calcolo, però, bi-

---

(1) A. SERPIERI. *Il problema tributario in relazione all'agricoltura*. Federaz. It. Consorzi Agrari. Commissione di studi tecnici ed economici, Piacenza, 1923.

(2) O. BORDIGA. *Dati presentati alla Commissione per l'imposta patrimoniale*.

(3) P. LANINO. *La questione meridionale: questione nazionale. Problema agricolo; problema tecnico*. Relazione presentata al Convegno degli Ingegneri Italiani in Napoli, 20-24 maggio 1920. Associazione Nazionale degli Ingegneri Italiani, Sez. di Napoli.

(4) M. CARLUCCI. *Valore attuale dei prodotti dell'agricoltura italiana*, in «Nuovi Annali del Ministero dell'Agricoltura», Anno III, n. 2, 30 giugno, 1923.

(5) O. BORDIGA. *Trattato di Economia Rurale*, 3ª ed., Portici, 1926.

(6) G. ZATTINI. *Valutazione della produzione lorda dell'agricoltura italiana*, in «Notizie Periodiche di Statistica Agraria», Fasc. Ottobre 1924.

sogna notare, è incluso il periodo bellico e quello dell'immediato dopo guerra, durante il quale le produzioni agricole annuali ebbero a subire sensibili diminuzioni. Ciò evidentemente ha influito sfavorevolmente sul valore medio annuo della produzione agricola, abbassandolo al disotto del normale.

Un'altra valutazione, quella del PORRI, per il 1926, attribuisce alla produzione agricola un valore di 50 miliardi, valore che è evidentemente elevato, nonostante riguardi un anno di buona produzione e di prezzi molto alti, e nonostante rappresenti il valore realizzabile sui mercati di vendita, anzichè sul campo (1).

Il FRANCIOSA, per il 1927 (2), sulla base dei prezzi medi dell'anno, depurati di una certa aliquota per spese di magazzinaggio, trasporti, senseria, ecc., stabiliva per la produzione agricola un valore di 42.408 milioni. Questo risultato se pur, a prima vista, può sembrare attendibile, non dà però eccessivo affidamento per i procedimenti non sempre corretti che si sono seguiti per ottenerlo.

Per il 1928, che è l'anno che interessa la nostra ricerca, non esistono valutazioni particolari. Tuttavia, per giungere allo scopo, potremo basarci agevolmente su quei risultati di calcoli precedenti che ci sembreranno i più adatti al caso nostro, oltre che per il loro grado di attendibilità, anche per i metodi e i criteri che ne stanno a base.

Per quanto riguarda i 20 principali prodotti, che costituiscono la parte più importante della produzione totale dell'agricoltura, osservando un interessante calcolo eseguito dall'Ufficio Studi e Rilevazioni dell'Associazione fra le Società Italiane per Azioni (3), notiamo che nel 1928 si è verificato, rispetto all'anno precedente, un sensibile aumento in quantità.

Riportiamo qui lo specchietto relativo al calcolo suddetto, e nel quale, oltre alla quantità, si ha anche il valore complessivo dei 20 principali prodotti, in base ai prezzi del 1913.

---

(1) V. PORRI. *L'evoluzione economica italiana nell'ultimo cinquantennio*, in « I Cavalieri del Lavoro », Roma, 1926.

(2) L. FRANCIOSA. *La produzione agraria e il suo valore nell'annata* 1927, in « Economia », Settembre 1928.

(3) *L'economia italiana nel* 1928. Associaz. fra le Società italiane per azioni e Confed. Gen. fascista dell'Industria Italiana, Roma, 1929, Soc. Tipogr. Castaldi.

Produzione dei principali generi agricoli.

Prodotti	Media annua 1909–1913 (quintali)	1925 (quintali)	1926 (quintali)	1927 (quintali)	1928 (quintali)	Media annua 1925–1928 (quintali)
Frumento	49.896.000	65.548.000	60.050.000	53.291.000	62.214.800	60.275.950
Segale	1.358.540	1.703.000	1.650.000	1.508.000	1.660.000	1.630.000
Orzo	2.199.980	2.791.000	2.400.000	2.056.000	2.400.200	2.411.800
Avena	5.362.580	6.851.000	5.900.000	4.459.000	7.027.100	6.059.275
Riso	4.750.400	6.416.000	6.800.000	6.961.000	6.315.500	6.623.125
Granoturco	25.486.000	27.932.000	29.996.000	22.195.000	16.508.400	24.157.850
Fave da seme	5.087.020	5.025.000	3.750.000	3.104.000	4.709.400	4.147.100
Fagiuoli e leguminose	2.532.800	2.519.000	2.708.000	2.033.700	1.775.900	2.259.150
Patate	16.548.800	21.877.000	23.110.000	19.453.000	14.898.500	19.834.625
Ortaggi di grande coltura	12.044.000	16.288.000	15.696.000	13.625.500	13.081.890	14.672.850
Barbabietole da zucchero	17.986.000	15.744.000	22.969.000	20.153.900	28.612.500	21.869.850
Canapa (tiglio)	835.000	1.239.000	1.212.200	829.900	857.400	1.034.625
Lino (tiglio)	28.500	25.800	25.000	20.900	23.090	23.697.500
Foraggi	234.755.000	250.724.000	253.287.000	217.202.000	202.664.000	230.969.250
Vino (ettolitri)	46.016.000	45.367.000	37.076.000	35.650.000	46.822.600	41.228.900
Olio	1.813.700	1.490.000	1.883.000	1.602.200	2.399.900	1.843.775
Bozzoli	408.000	406.300	413.100	507.020	524.884	462.826
Agrumi	7.862.000	6.654.000	8.216.200	6.621.200	6.823.200	7.078.650
Frutta varie	5.293.000	6.838.000	8.934.000	8.230.800	8.004.200	8.001.750
Castagne	6.429.000	4.456.000	4.278.000	4.280.300	5.578.500	4.648.200
Valore in base ai prezzi del 1913 (milioni di lire)	8.006	8.309	8.138	7.165	7.753	7.841

Precisando, dunque, l'aumento verificatosi nella quantità dal 1927 al 1928, come può rilevarsi dalle cifre su esposte, è stato dell'8,20 per cento circa.

I prezzi, invece, nel 1928, in confronto al 1927 sono diminuiti. Da un indice di 567,63 nel 1927 sono passati, infatti, a un indice di 554,65 nel 1928, con una contrazione quindi del 2,29 % appena, diminuzione lievissima e che non può, perciò, aver neutralizzato che solo in parte il beneficio derivante dall'aumentata produzione.

Riducendo, infatti, in lire post-belliche, le due cifre esprimenti il valore complessivo dei 20 principali prodotti nei due anni 1927 e 1928 in base ai prezzi del 1913, si ha per il 1927 una cifra corrispondente a un valore di 37.735 milioni circa, e per il 1928 una cifra di 38.095 milioni, che potremo convenientemente arrotondare a 38 miliardi, per comodità di calcolo.

Bisognerà ora tener conto anche delle variazioni verificatesi dal 1927 al 1928, sia nella quantità sia nei prezzi di quei prodotti dell'agricoltura che non sono compresi nei 20 sopra esaminati e che costituiscono una parte, e non certo trascurabile, della produzione complessiva.

Per quanto riguarda la produzione zootecnica v'è da osservare che essa non può essere tutta compresa nella valutazione dei soli foraggi, essendovi altri prodotti animali che derivano non già da trasformazione di foraggi, ma dall'utilizzazione prevalentemente di residui che diversamente andrebbero perduti, o dall'utilizzazione di materie che non hanno un vero e proprio valore di mercato. Intendiamo riferirci con ciò ai prodotti del pollame sia in carne che in uova o in piume o altro, ai prodotti delle api sia in cera che in miele, e ad altri prodotti similari.

Per tali prodotti il Franciosa, per il 1927, comprendendovi anche i bozzoli, stabiliva complessivamente un valore di 1.892 milioni, facendo notare che, nel 1926, i soli bozzoli erano stimati 1 miliardo e 600 milioni di lire carta. Se noi ora consideriamo che nel 1927 il prezzo dei bozzoli è sensibilmente diminuito, dovremmo dedurre, a condizione che la quantità prodotta sia rimasta invariata, che anche il valore complessivo è diminuito. Ma la quantità, come risulta dallo specchietto precedente è, invece, sensibilmente aumentata nel 1927, e l'aumento è tale da poter neutralizzare la contrazione verificatasi nei prezzi. Possiamo, dunque, molto plausibilmente ammettere che il valore dei bozzoli, fissato in 1.600 milioni nel 1926, sia rimasto presso a poco invariato anche nel 1927.

Sicchè, togliendo dai 1.892 milioni, a cui il FRANCIOSA aveva stimato i prodotti animali non compresi nella valutazione dei foraggi, i 1.600 milioni di valore dei bozzoli, che noi abbiamo già compreso nel valore dei 20 principali prodotti sopra considerati, si ha che il valore che noi cerchiamo per gli altri prodotti animali sarebbe, secondo il FRANCIOSA, di 292 milioni. Cifra questa inverosimilmente bassa in quanto oltre al valore del miele, della cera, delle piume ecc. dovrebbe rappresentare anche una parte del valore della carne di pollame e delle uova. E diciamo « una parte » di tale valore, poichè, se è vero che il pollame prevalentemente si nutre di residui che diversamente andrebbero perduti, è anche vero che spesso, quando non è allevato razionalmente, è allevato però mediante somministrazione di alcuni altri prodotti, quali il granturco ecc., che noi abbiamo già valutato, includendoli nel valore dei 20 principali prodotti.

Per poter fare esattamente il calcolo bisognerebbe poter conoscere quanta parte di tali prodotti è destinata all'allevamento del pollame, per poterne poi detrarre il valore dal valore complessivo dei prodotti stessi. Cosa questa che allo stato della rilevazione statistica è impossibile, e che può essere fatta solo congetturalmente, per via indiretta e di larga approssimazione.

Il FOTTICCHIA (1) nel 1926 ritenne il valore della carne di pollame di 850 milioni e quello delle uova di 2 miliardi e 700 milioni. Complessivamente attribuiva, dunque, a questi prodotti animali un valore di 3 miliardi e 550 milioni.

Per il 1928, tenuto conto che la diminuzione dei prezzi per tali generi di consumo è stata piuttosto sensibile, e tenuto conto del fatto che parte del valore di tali prodotti animali è già compresa nel valore da noi stabilito per i 20 principali prodotti agricoli, crediamo di non allontanarci eccessivamente dalla realtà ritenendo attendibile una cifra di 2.600 milioni, comprendendovi anche il valore del miele e della cera che può presumersi dai 15 ai 20 milioni circa.

Per quanto riguarda la produzione forestale, il FRANCIOSA, per il 1927, ha stabilito un valore di 3 miliardi e 26 milioni, basandosi però sulle quantità calcolate dal CARLONI (2) che rappresentano la

---

(1) N. FOTTICCHIA. *Zootecnia, caseificio e pollicoltura.* Atti del XIII Congr. Internaz. di Agric. Roma, 1926.

(2) P. CARLONI. *Estensione e distribuzione dei boschi italiani. Produzione, commercio con l'estero e consumo dei prodotti legnosi in Italia,* in « Studi e Notizie » Rassegna trimestrale dell'Istituto di Economia e Statistica Agraria, Ministero Economia Nazionale, Anno I, fasc. 1-2, 1926.

media annua del periodo 1924-25 e riguardano soltanto i legnami da opera, sia resinosi che di latifoglie, e i combustibili, come risulta dallo specchietto che segue :

Periodo considerato	Legname da opera		Combustibili		Totale
	resinoso (migliaia di mc.)	da latifoglie (migliaia di mc.)	legna da fuoco (migliaia di mc.)	legna per carbone (migliaia di mc.)	(migliaia di mc.)
1909–13 . . .	400	1.000	13.000	3.000	17.400
1924–25 . . .	800	1.200	14.200	3.000	19.200

Ma prescindendo per ora dal fatto che il FRANCIOSA ha valutato la produzione boschiva basandosi su dati del 1924-25, v'è da osservare che le cifre del CARLONI per le quantità appaiono piuttosto basse. Già il CARLUCCI, infatti, per il triennio 1920-22, giungeva ai seguenti risultati che sono sensibilmente superiori, meno che per il legno da opere di latifoglie (1) :

legno resinoso : mc. 1.282.000 di cui 482.000 mc. nelle nuove provincie ;

legno da opere di latifoglie : mc. 1.033.000 di cui 33.000 mc. nelle nuove provincie ;

legna da ardere e per carbone : q.li 120 milioni, di cui 10 milioni circa nelle nuove provincie.

I 120 milioni di q.li di legna da ardere e per carbone corrisponderebbero presso a poco a 18 milioni di mc.

Se si considera, ora, l'intenso sfruttamento a cui sono stati sottoposti, durante la guerra, i nostri boschi e le nostre foreste, e si pensa anche che la produzione boschiva, nella maggior parte non è strettamente annuale, ma si verifica a periodi più o meno lunghi, si deve dedurre che i dati del CARLUCCI, riguardando appunto l'immediato periodo post-bellico, devono essere leggermente inferiori al normale. A maggior ragione, quindi, saranno inferiori al vero i dati del CARLONI, i quali, pur riferendosi a un periodo più lontano della guerra, a un periodo cioè in cui la produzione tende a normalizzarsi, sono però inferiori a quelli del CARLUCCI.

Sicuri di avvicinarci quanto più è possibile alla realtà, basandoci

(1) M. CARLUCCI. *Valore attuale dei prodotti dell'agricoltura italiana*, in « Nuovi Annali del Ministero di Agricoltura », Anno III, n. 2, 30 giugno 1923.

sulle cifre del CARLUCCI per il 1920-22, ammetteremo che la produzione media dei boschi in questi ultimi anni, dal 1926 al 1928, possa esser stabilita come segue:

legno resinoso	mc.	1.500.000
legno da opere di latifoglie	»	1.300.000
combustibili	»	20.000.000

Anche queste cifre, come quelle del CARLUCCI e del CARLONI, vanno intese in un senso molto lato, e in via di larga approssimazione, mancando qualsiasi statistica ufficiale al riguardo. Noi le abbiamo ottenute basandoci, come già abbiamo detto, sui risultati del CARLUCCI e tenendo presente, con criteri molto larghi, l'incremento medio annuo che può essersi verificato nella produzione boschiva dal periodo 1909-15 in poi. È parso opportuno seguire tale criterio in quanto la produzione boschiva, per la sua stessa natura, quando non intervengano fattori accidentali, come incendi, tagli estesi, trasformazioni ecc., si presenta con una certa regolarità, non essendo soggetta, come altre colture, alle influenze delle vicende atmosferiche, e di altri fattori stagionali.

Ma la produzione boschiva, oltre ai tre prodotti fondamentali sopra esaminati, comprende anche altri prodotti, che, per quanto secondari, non sono affatto trascurabili. La produzione del sughero, infatti, la quale dà vita a importanti industrie, era calcolata dal CARLUCCI a 50.000 q.li in media nel periodo 1920-22, e a 55.000 dal CARLONI nel 1925. Nel 1928, dato l'incremento preso dalla industria del sughero in questo ultimo triennio, può ritenersi che, essendosi intensificato lo sfruttamento, la produzione sia aumentata a 120.000 q.li circa. La sola esportazione di sughero greggio è stata, infatti, nel 1927, di q.li 66.186, e, nel 1928 di q.li 69.584. Altri prodotti dei boschi sono costituiti dalla faggiuola, dalle ghiande, cortecce, fogliami ecc., valutati dal CARLUCCI, ai prezzi del 1920-22, a 40 milioni circa, cioè a L. 10 per ogni ettaro della superficie forestale. Per il 1928, tenendo conto che la superficie forestale, compresi i castagneti, è di ettari 5.585.400, come risulta dall'aggiornamento eseguito per il 1927 dall'Istituto Centrale di Statistica sui dati del Catasto Agrario (1), e tenendo conto del fatto che i prezzi, nei due periodi, sono presso a poco uguali, possiamo stabilire, come valore di questi altri prodotti dei boschi, una cifra di 55 milioni circa.

(1) *Bollettino Mensile di Statistica*, Istituto Centrale di Statistica, Anno 1928, fasc. 11, novembre, pag. 991.

Il Franciosa, dunque, come già sopra abbiamo detto, basandosi sui dati della produzione boschiva stabiliti dal Carloni, fissava per il 1927, come valore della produzione stessa, una cifra di 3 miliardi e 26 milioni. Se si pensa ora che i dati del Carloni non solo si riferiscono al periodo 1924-25, ma sono anche inferiori al vero, come abbiamo potuto constatare ; e se si pensa che essi non comprendono tutta la produzione forestale, rimanendo esclusi il sughero e gli altri prodotti secondari, il risultato ottenuto dal Franciosa apparirà indubbiamente lontano dal vero e si ravviserà perciò subito l'opportunità di elevarlo convenientemente.

Per il 1928, sia per quanto riguarda il legname da opera, resinoso e di latifoglie, sia per quanto riguarda i combustibili, osserviamo che i prezzi rispetto al 1927 sono diminuiti. La diminuzione però è lieve e riguarda solo alcuni prodotti, e, ad ogni modo, essa non è tale da neutralizzare, se non in piccola parte, l'aumento considerevole della quantità da noi constatato. Sicchè riteniamo di poter elevare, con sufficiente approssimazione, i 3 miliardi e 26 milioni del Franciosa per il 1927 , a 3 miliardi e mezzo per il 1928, comprendendovi anche il valore del sughero che a L. 105 il q.le ammonta a 12,6 milioni, e il valore dei prodotti secondari minori che abbiamo già calcolato in 55 milioni. Il valore complessivo della nostra produzione boschiva, si aggira dunque intorno ai 3 miliardi e mezzo, intorno a una cifra, cioè, che noi crediamo possa dare effettivamente l'impressione dell'entità del reddito lordo proveniente dai nostri boschi, reddito che se è ancora bassissimo per una infinità di ragioni che non è qui il luogo di esporre, è però notevolmente migliorato in questi ultimi anni per l'opera fattiva del Governo, il quale, creando la Milizia Forestale ed emanando sagge e provvide disposizioni, ha dimostrato di aver saputo ben valutare tutta l'importanza, non solo economica, del nostro patrimonio forestale.

Per completare la valutazione della produzione lorda dell'agricoltura, bisognerà ora tener conto di tutti quei prodotti non compresi fra quelli della grande coltura, e che pur costituiscono dei valori non trascurabili.

Intendiamo riferirci, oltre che ai fiori, all'alloro e alle piante ornamentali in genere, anche ai prodotti dei giardini e dei piccoli orti destinati al rifornimento familiare, ai prodotti dei vivai, ad alcuni prodotti delle industrie rurali, quali le vinacce, la feccia, le sanse, ecc., ai prodotti di alcune piante industriali quali il tabacco, i semi oleosi, i semi di piante da fiori, di ortaggi, di graminacee, di leguminose fo-

raggere, e altre semenzine prodotte e a volte anche esportate. Ma, oltre che a tutti questi prodotti secondari di piante coltivate, intendiamo riferirci anche ai prodotti di alcune piante che, se non richiedono alcuna cura per la coltivazione, richiedono però un lungo, diligente lavoro, per la raccolta, preparazione e conservazione, ecc. Alcuni di questi prodotti servono addirittura all'alimentazione dell'uomo. Tali sono i funghi, i tartufi, alcune verdure, ecc. Altri servono a usi industriali e commerciali come la ginestra, l'agave americana, la saggina, l'erica, i giunghi, i vimini, le radici di liquerizia, alcune piante medicinali e odorose da cui si estraggono essenze, ecc.

Per i soli fiori e le piante ornamentali, che costituiscono la parte più importante dei prodotti non compresi fra quelli della grande coltura, abbiamo, per la prima volta in Italia, una valutazione ufficiale, recentemente eseguita dall'Istituto Centrale di Statistica del Regno per il 1928 (1).

Secondo tale valutazione la superficie coltivata a fiori sarebbe in Italia complessivamente di 3.685 ettari circa, di cui 3.042 a cultura specializzata e 643 a cultura promiscua, con un valore lordo della produzione totale di 305 milioni circa. Di tale cifra, 288 milioni rappresentano il solo valore dei fiori, e 17 milioni il valore delle piante ornamentali.

Questo risultato, sebbene l'Istituto Centrale di Statistica avverta che non debba ritenersi come realtà assoluta ma soltanto come un indice di ciò che può essere il valore della produzione floreale, costituisce la prima notizia concreta su basi positive che noi abbiamo, e deve essere pertanto certamente preferito alle tante stime congetturali e induttive che fino ad oggi hanno costituito l'unico elemento su cui ci si poteva basare per calcoli del genere.

Noi lo accettiamo quindi integralmente, solo arrotondando convenientemente a 300 milioni per comodità di calcolo.

Quanto agli altri prodotti è difficile, se non impossibile, salvo poche eccezioni, stabilire il loro valore, mancando qualsiasi rilevazione statistica.

Notiamo intanto che il CARLUCCI, nella sua valutazione della produzione agricola lorda, relativa al periodo 1920-22 (2) stabilisce per

---

(1) ISTITUTO CENTRALE DI STATISTICA DEL REGNO. *Bollettino Mensile di Statistica Agraria e forestale*, Anno 1929, fasc. 12, pag. 602.

(2) CARLUCCI. *Valore attuale dei prodotti dell'agricoltura italiana*, in « Nuovi Annali del Ministero di Agricoltura », Anno III, n. 2 (30 giugno 1923).

tali prodotti, oltre alle quantità anche i valori corrispondenti qui sotto segnati.

Prodotti	Quantità — quintali	Prezzo unitario — lire	Valore totale — migliaia di lire
Tabacco	200.000	600	120.000
Semi oleosi	300.000	200	60.000
Semi di leguminose foraggere o semenzine	240.000	800	192.000
Semi di piante da fiori, di ortaggi e di graminacee	20.000	900	18.000
Funghi freschi	20.000	500	10.000
Tartufi (chilogrammi)	90.000	30	2.700
Prodotti dei vivai, giardini, ecc. (ettari di superficie)	35.000	10.000	350.000
Sanse	—	—	52.000
Altri prodotti (rad. di liquerizia, piante medicinali, ecc.) . . .	—	—	75.340
Prodotti secondari del vino (vinello, tartaro, vinacce, ecc.) .	—	—	226.500
Prodotti non nominati (ginestra, agave, saggina, ecc.)	—	—	30.000
		Totale . . .	1.136.540

Tale cifra, nel nostro caso, va indubbiamente abbassata, e di molto, per diverse ragioni. Anzitutto, in essa è compreso il valore di alcuni prodotti, come il tartaro, che, a rigore, non possono considerarsi essenzialmente agricoli, derivando da manifatturazioni industriali. In secondo luogo, alcuni prodotti dei vivai, giardini, ecc., che il CARLUCCI calcola a parte, noi li abbiamo già compresi nel valore dei venti principali prodotti e precisamente o tra gli ortaggi, o tra le frutta varie. Infine, la cifra del CARLUCCI va, nel nostro caso, sensibilmente abbassata, in quanto essa è ottenuta in base ai prezzi medi del triennio 1920-22, triennio durante il quale i prezzi erano in media molto più elevati di quelli del 1928 che è l'anno che costituisce la base del nostro calcolo. Inoltre, la diminuzione dei prezzi dal 1920-22 al 1928, per questi prodotti non di prima necessità, noi pensiamo debba essere stata più intensa di quella avutasi in media per tutti gli altri prodotti.

In base a tutte queste considerazioni, ammettendo per i prodotti di cui sopra, non compresi fra quelli della grande cultura, un valore

approssimativo di 550 milioni, crediamo di non rimanere troppo lontani dal vero.

Concludendo, dunque, possiamo stabilire come segue i valori dei diversi elementi che compongono la produzione agricola lorda italiana nel 1928:

	milioni di lire
Valore dei 20 principali prodotti	38.000
Produzione boschiva forestale	3.500
Altri prodotti vegetali vari, compresi i fiori . .	850
Altri prodotti animali non compresi nella valutazione dei foraggi	2.600
Totale . . .	44.950

La cifra complessiva che se ne ricava, risulta sensibilmente superiore a quella del FRANCIOSA per l'anno precedente. Vi è, infatti, tra le due cifre una differenza di più di due miliardi e mezzo che è dovuta in parte a un aumento effettivo della produzione nel 1928 rispetto al 1927 (aumento che, come abbiamo visto, non ha potuto essere tutto neutralizzato dalla diminuzione dei prezzi) e in parte è dovuta anche a una evidente sub-valutazione da parte del FRANCIOSA, specie per quanto riguarda la produzione boschiva e quella degli altri prodotti animali non compresi nel valore dei foraggi.

I 44.950 milioni di valore della produzione agricola lorda, da noi calcolati per il 1928, corrispondono in lire pre-belliche a 9 miliardi e 148 milioni.

Se si pensa che nell'immediato periodo prebellico la produzione agricola era valutata dagli 8 ai 9 miliardi, si deve dedurre che oggi essa è aumentata, sia pure leggermente. Ciò è di evidente osservazione comune e, del resto, concorda con le comuni vedute degli studiosi e competenti al riguardo. Dice il SERPIERI in un suo discorso tenuto a Firenze, nel settembre del 1929, al Congresso della Società per il Progresso delle Scienze: «... nel complesso, chi vive a contatto dell'agricoltura, e, anche senza cifre statistiche, rileva i mille segni di intensificazione di essa, non può non acquistare la convinzione che i 40 miliardi siano diventati oggi più: ai prezzi indicati, cioè quintupli di quelli pre-bellici, stimo che essi, probabilmente, oltrepassino i 45 miliardi, con un aumento di oltre il 10 %, sempre, si intende, in un'annata media».

Riteniamo perciò molto attendibile il nostro risultato per il

1928, e passiamo quindi a calcolare il reddito netto proveniente dall'agricoltura.

Tale reddito è costituito da quella parte del prodotto totale che rappresenta la retribuzione dei diversi fattori economici che hanno concorso alla produzione ; e per ottenerlo bisognerà, quindi, dal prodotto totale, detrarre tutte quelle spese che non si risolvono in rimunerazione dei fattori cooperanti alla produzione, ma sono necessarie perchè il fatto produttivo possa rinnovarsi. Bisognerà cioè detrarre la quota di reintegrazione dei capitali e dei servizi extra-agricoli.

I pareri degli studiosi intorno all'entità percentuale di tale quota sulla produzione lorda sono piuttosto discordi. Anzitutto, bisogna osservare, essa non è fissa, ma varia attraverso il tempo, così come variano le condizioni economiche e sociali in cui la produzione si svolge. È chiaro, infatti, che l'entità delle spese occorrenti per rinnovare il fatto produttivo, poniamo 50 o 60 anni fa, quando cioè i sistemi di coltivazione erano ancora molto rudimentali, non può corrispondere all'entità delle spese che occorrono, per es., oggi che l'agricoltura si vale di tutti i ritrovati della scienza, di macchine, di concimi chimici, di mezzi di trasporto molto più rapidi, ecc., e va sempre più perfezionandosi, razionalizzando i sistemi di produzione in modo da ottenere, sì, una maggiore quantità di prodotto, ma aumentando anche la massa dei capitali necessari.

Inoltre, quando in Italia non si era ancora sviluppata la grande industria, le condizioni del mercato del lavoro erano profondamente diverse da quelle che possono essere oggi.

Se si pensa poi all'ingente onere fiscale che la proprietà terriera, più che qualsiasi altro cespite di ricchezza, deve sopportare ; e si pensa anche che questo onere è venuto sempre più aggravandosi nel dopoguerra, si vedrà come la parte della produzione lorda, rappresentante le spese, debba essere oggi necessariamente più elevata che non in passato.

Secondo i risultati di un'inchiesta eseguita dal Tassinari per i diversi tipi di azienda dell'agricoltura italiana (1), la parte di produzione assorbita dalle spese varierebbe da un minimo del 4 e del 7 % a un massimo del 46 e 49 % per l'anteguerra, e da un minimo del 3 e del 6 % a un massimo del 46 % per il dopoguerra.

Il Maroi (2), nel considerare questi risultati sarebbe propenso a

(1) G. Tassinari. *Saggio intorno alla distribuzione del reddito nell'agricoltura italiana.* Piacenza 1926, Federaz. Ital. dei Consorzi Agrari.

(2) L. Maroi. *Valore e reddito della terra,* Estratto dagli « Annali della R. Università di Macerata », Vol. IV, 1929, Anno VII, pag. 183.

stabilire una quota media del 33 % per il periodo pre-bellico e del 32 % per quello post-bellico.

Stando a queste due percentuali, poichè è ovvio che nel dopoguerra le spese sono, in senso assoluto, maggiori che non nell'anteguerra, dovremmo ammettere che la produzione nel periodo post-bellico è aumentata. E infatti l'aumento c'è, come abbiamo più sopra constatato, ma esso non è tale da poter corrispondere a quell'aumento che noi crediamo si sia verificato nelle spese, e ciò perchè, secondo noi, l'aumento che si è avuto nelle spese è stato più che proporzionale all'aumento di produzione.

Se per l'anteguerra, dunque, basandosi sui risultati dell'inchiesta del Tassinari si può ammettere una percentuale delle spese sulla produzione lorda del 33 %, per il periodo post-bellico deve ammettersene una maggiore. E poichè riteniamo che la percentuale del 33 % proposta dal Maroi per il periodo pre-bellico sia piuttosto elevata, potremo ritenerla, invece, valida per il periodo attuale.

Il Serpieri (1) basandosi sulle condizioni del mercato pre-bellico riteneva attendibile una percentuale del 25 %. Ma forse una tale percentuale per allora è da considerarsi piuttosto bassa. Per il periodo attuale, quindi, una percentuale del 33 % non potrà davvero sembrare eccessiva date le differenti condizioni economiche e anche sociali in cui la produzione si è svolta nei due periodi. L'esistenza di tale differenza è provata poi anche dal fatto che il reddito fondiario (beneficio + profitto) dall'anteguerra al dopoguerra è diminuito, non solo per la variazione verificatasi nella distribuzione del reddito agricolo complessivo a favore dei redditi di lavoro, ma anche per il considerevole aumento delle spese che i proprietari debbono oggi sostenere. Il Degli Espinosa, infatti, nel suo recente calcolo della ricchezza privata degli Italiani nel 1928 (2), tenendo conto di tali nuovi elementi, diminuisce al 23 % la percentuale rappresentante il reddito fondiario sulla produzione lorda, percentuale che, per il periodo pre-bellico, era stata invece stabilita al 25 % dal Prof. Gini.

All'affermazione che nel dopoguerra le spese sono aumentate, si potrebbe obiettare che, secondo i risultati dell'inchiesta del Tassinari, i massimi e i minimi delle percentuali rappresentanti tali spese nel dopo guerra, sono inferiori a quelle corrispondenti dell'anteguerra.

(1) A. Serpieri. *Il problema tributario in relazione all'agricoltura.* Federaz. italiana nei consorzi agrari, Piacenza, pag. 5.

(2) A. Degli Espinosa. *La ricchezza privata degli Italiani nel* 1928, in « Metron », Vol. VIII, nº 1-2, 1929.

Si può però fare osservare che questa divergenza è solo apparente, perchè può dipendere dall'esiguo numero di aziende considerate per ciascun tipo, per cui è facile che, l'azienda considerata come corrispondente al minimo o al massimo delle percentuali delle spese, sia piuttosto l'eccezione che la regola, eccezione che sparirebbe nella media se il numero delle osservazioni fosse più esteso.

In base dunque a una percentuale del 33 % rappresentante le spese, su una produzione lorda valutata da noi a poco meno di 45 miliardi, si ha che il reddito netto realizzato dall'agricoltura nel 1928 è stato di poco più di 30 miliardi.

Questa cifra, che per molti aspetti che verremo man mano esponendo a noi sembra molto vicina alla realtà, concorda in modo soddisfacente con i risultati delle valutazioni eseguite in questi ultimi anni, sia pure con criteri e metodi diversi, da vari autori.

Il Mortara, infatti, per il 1927 giunge allo stesso risultato. Il Boldrini, invece, per lo stesso anno, calcola il reddito agricolo in 23 miliardi, con una diminuzione quindi, rispetto alla cifra da noi trovata, di 7 miliardi.

Il nostro risultato, di fronte a quello del Prof. Gini per il 1925 (32 miliardi) rappresenta, espresso in lire correnti, una diminuzione del 6,25 %, che trova la sua giustificazione, principalmente, nel diverso valore della moneta in cui le due cifre sono espresse, rispettivamente per il 1925 e 1928.

Il risultato del Boldrini per il 1927, di fronte a quello del Prof. Gini per il 1925, rappresenta invece, s'intende in lire correnti, una riduzione ben più forte, che raggiunge il 27 % e che a noi sembra non possa essere giustificata da alcuna considerazione, tanto più se si pensa che essa si sarebbe verificata nel breve spazio di un biennio, il quale, per quanto tumultuoso e denso di avvenimenti importanti per la nostra vita economica nazionale, non presenta però, nei riguardi dell'agricoltura, perturbamenti così gravi da poter far ritenere attendibile una diminuzione del reddito agricolo di più di un quarto.

Basta del resto osservare, come espressione dell'andamento del mercato dal 1925 al 1927, le variazioni verificatesi nel livello dei prezzi delle derrate alimentari, assunto come indice dai prezzi delle derrate agricole, per convincersi che niente di gravemente eccezionale è avvenuto all'infuori del regolare e metodico movimento di assestamento del mercato alle nuove condizioni economiche create dalla crisi di rivalutazione e stabilizzazione della moneta. Il livello dei prezzi delle derrate alimentari è sceso, infatti, dal 1925 al 1927 del 12,75 %,

dopo però aver toccato nel 1926 un livello di 683. Diminuzione piuttosto accentuata, se vogliamo, ma ad ogni modo non tale da giustificare l'entità della diminuzione accusata dalla cifra del BOLDRINI. Vero è che a questo fattore va aggiunto l'altro della scarsa annata agricola nel 1927: ma si può osservare anche che la scarsezza del raccolto è stata molto modesta, risultando il raccolto stesso di poco inferiore alla media del periodo 1925-28, come può rilevarsi dallo specchietto riportato a pag. 268.

Se poi, per avere una più perfetta paragonabilità fra le cifre dei vari risultati, riduciamo le cifre stesse in lire pre-belliche, dividendole cioè per il livello generale dei prezzi dell'anno a cui si riferiscono, vedremo allora che mentre i 32 miliardi del Prof. GINI per il 1925 corrispondono a poco meno di 5 miliardi, e i 23 del BOLDRINI pel 1927 corrispondono a 4.367 milioni, i 30 da noi trovati per il 1928 corrispondono a 6,1 miliardi.

Se teniamo presente, ora, che il reddito agricolo nel 1914, cioè nell'immediato periodo pre-bellico, era stato valutato dal Prof. GINI a 7 miliardi, stando al risultato del BOLDRINI, dovremmo ammettere che esso, pur comprendendo il reddito delle nuove provincie, non solo è fortemente diminuito nel 1927-28, ma ha continuato a diminuire anche dopo il 1925 fino al punto da segnare rispetto all'anteguerra una diminuzione del 37,62 %, e rispetto al 1925 una diminuzione del 12,66 % —. Queste diminuzioni, osservate dal punto di vista del reddito medio per testa, appaiono ancora più gravi, se si tien conto del fatto che la popolazione italiana, in seguito anche all'annessione delle nuove provincie, è aumentata da 35.5 a 41 milioni, cioè del 15 % circa. Vero è che la popolazione agricola è aumentata con ritmo più lento (sulla popolazione attiva risulta lievissimamente diminuita), ma ciò non toglie che le diminuzioni constatate non siano ugualmente eccessive e tali da ridurre al minimo il già troppo ridotto reddito individuale delle classi agricole.

Secondo il nostro risultato per il reddito agricolo, dal 1925 al 1928, si sarebbe invece verificato un aumento di più di un miliardo, aumento che appare giustificato, oltre che dal fatto che il Prof. GINI considera i suoi risultati per il 1925 leggermente inferiori al vero, anche dal fatto che la parte di produzione lorda rappresentante le spese, mentre rispetto all'anteguerra e fino al 1925-26 era sensibilmente aumentata, in seguito, invece, noi crediamo abbia iniziata una discesa che forse dura tuttora.

Naturalmente, diminuendo sul totale della produzione la parte

che rappresenta le spese, aumenta la parte che rappresenta il reddito netto; sicchè noi possiamo constatare che nel 1925, con una produzione agraria maggiore che non nel 1928, si ha un reddito agricolo netto minore ; e viceversa : nel 1928, con una produzione agraria minore, si ha un reddito agricolo maggiore.

Il fatto della diminuzione delle spese di produzione dopo il periodo 1925-26, potrebbe, forse, a prima vista, sembrare strano, se non lo giustificasse la considerazione che in tale periodo si era in una fase di piena inflazione e quindi di prezzi rapidamente crescenti e di alti redditi. Ciò ha favorito, su larga scala, l'intensificazione della coltura, tanto più che questa era allettata dall'ascesa dei prezzi dei prodotti agricoli, ascesa che è stata più accentuata e di più lunga durata di quella verificatasi nelle altre branche dell'economia.

Osservando l'indice del livello dei prezzi delle merci all'ingrosso in Italia, secondo l'elaborazione del Consiglio Provinciale della Economia di Milano, notiamo, infatti, per quanto riguarda i prodotti agricoli, che l'indice ha raggiunto il massimo nel 1926 con 683,38, mentre i prodotti industriali erano, in tale anno, già in diminuzione avendo raggiunto il massimo nell'anno precedente con un indice di 645,70.

All'intensificarsi della coltura ha corrisposto, naturalmente, un aumento delle spese, sia in senso assoluto che in senso relativo. L'aumento di produzione, che è seguito all'intensificazione della coltura, non ha potuto, infatti, essere proporzionale all'aumento delle spese per diverse ragioni. Anzitutto se l'intensificazione della coltura, come sembra, si è verificata relativamente a colture già esistenti, senza però estenderle, è chiaro che, essendo l'agricoltura, sotto questo aspetto, un'industria a costi crescenti, le ulteriori dosi di capitale in essa investite danno un rendimento minore, aumentano cioè le spese. Se, invece, l'intensificazione si è verificata relativamente a nuove colture, o estendendo quelle esistenti, poichè per varie ragioni è necessario che trascorra un certo tempo prima che il capitale in esse investito sia ammortizzato, è naturale che le spese, almeno in un primo periodo, rappresentino nel bilancio delle aziende una proporzione più elevata.

Iniziatosi nel 1927, con la crisi di rivalutazione e stabilizzazione della moneta, il periodo di deflazione, e quindi di discesa dei prezzi e di contrazione dei redditi, la coltura intensiva subì un brusco rallentamento, l'entità delle spese di produzione diminuì, e in conseguenza diminuì pure, quantitativamente, la produzione stessa, ma è aumen-

tata, per converso, la parte rappresentante il reddito netto. Queste variazioni, così sensibili e frequenti nelle posizioni che occupano sul reddito complessivo i diversi fattori cooperanti alla produzione, trovano la loro spiegazione nel dinamismo da cui è stata caratterizzata nel periodo in considerazione tutta l'economia italiana in genere, l'agricola compresa. Ma se 30 miliardi di reddito agricolo, per il 1928 rappresentano, in lire prebelliche, un miglioramento di più di un miliardo rispetto al 1925, altrettanto non può dirsi rispetto al periodo prebellico. Per questo periodo, come già sappiamo, il reddito agricolo, calcolato dal Prof. Gini, è di 7 miliardi e rappresenta, di fronte alla nostra cifra di 6,1 miliardi in lire prebelliche, una differenza in più di circa un miliardo, differenza che apparirà ancora maggiore, se si pensa che nei 6,1 miliardi relativi al 1928 è compreso anche il reddito derivante dalle nuove provincie.

Il reddito agricolo, dunque, risulta nel dopoguerra alquanto diminuito; sicchè le classi agricole, a differenza di quanto potrebbe sembrare a prima vista, ancora nel 1928, non avevano raggiunto la posizione economica di cui godevano prima della guerra.

Ma il reddito agricolo, oltre ad essere diminuito, ha subìto, rispetto al periodo pre-bellico, notevoli modificazioni nella sua distribuzione tra le diverse categorie economiche cooperanti alla produzione. Accertare la natura e l'entità di tali variazioni, costituisce un problema importantissimo, al quale si collegano interessanti questioni economiche e sociali, ed è tutt'altro che di facile soluzione. Varie e complesse sono, infatti, le vedute degli studiosi al riguardo. Secondo un'accurata inchiesta eseguita dal Prof. Tassinari, la remunerazione del lavoro sarebbe considerevolmente aumentata, tanto da sorpassare in alcuni casi il 50, e anche il 59 % del prodotto netto. «Si deve ciò, egli dice, al diverso aumento delle mercedi in relazione all'aumento nel valore dei prodotti» (1). Questo fenomeno è stato constatato dall'A. per il periodo 1921-22. Se si pensa ora che nel 1928, rispetto al 1921-1922 i prezzi dei prodotti agricoli sono diminuiti, mentre i salari dei contadini, nella più semplice delle ipotesi, sono rimasti stazionari, si deve dedurre che la percentuale che rappresenta la remunerazione del lavoro sul valore lordo della produzione è maggiore nel 1928 che nel 1921-22.

Sempre secondo le risultanze dell'inchiesta del Tassinari, avrebbe

(1) G. Tassinari. *Saggio intorno alla distribuzione del reddito nell'agricoltura italiana*. Piacenza, 1926, pag. 164.

presentato un miglioramento nel dopoguerra, anche l'interesse del capitale di esercizio.

Risulterebbe invece diminuita la remunerazione del lavoro di direzione e amministrazione.

Il reddito fondiario (beneficio + profitto), conseguentemente alle variazioni verificatesi negli altri elementi che compongono il reddito agricolo netto, ha subìto una sensibile diminuzione.

Il SERPIERI per il 1923 stabiliva le seguenti percentuali di distribuzione del prodotto lordo:

Reddito di puro lavoro	48,5 %
Reddito fondiario	14,3 %
Remunerazione del lavoro di direzione e amministrazione	11,5 %
Interesse del capitale di esercizio	

La rimanente parte, cioè il 25,7 %, rappresenterebbe le spese di produzione.

Una tale distribuzione, però, noi crediamo non possa essersi verificata in realtà. Essa conduce infatti a risultati molto lontani dal vero, e quindi in contrasto coi risultati ottenuti e controllati da altri autori.

Per quanto riguarda il reddito fondiario, la percentuale del 14,3 per cento sul prodotto lordo, non può assolutamente considerarsi attendibile, non fosse altro che per il fatto che allorchè ci si basa su di essa per calcolare, mediante la capitalizzazione del reddito, la ricchezza terriera nazionale, si ottiene una cifra bassissima che contrasta in modo evidente con la realtà. Su una produzione agricola lorda di 35 miliardi, quale il SERPIERI stesso l'ha stabilita per il 1922, una percentuale del 14,3 % dà un reddito fondiario di poco più di 5 miliardi che, capitalizzato al 100 per 5, dà una ricchezza terriera nazionale di 100 miliardi.

Ma, anche se elevassimo da 35 a 38 miliardi il valore della produzione agricola lorda e capitalizzassimo il reddito fondiario al 100 per 4, anzichè al 100 per 5, otterremo ugualmente un risultato inferiore al vero (136 miliardi circa).

Del resto se ammettessimo per poco come vero un valore della proprietà terriera nazionale di 100-136 miliardi nel 1923, dovremmo poi conseguentemente ammettere che due anni più tardi, cioè nel 1925, tale valore si è quasi raddoppiato.

Risulta infatti dal calcolo del Prof. Gini per tale anno che la ricchezza terriera privata aveva un valore di 200 miliardi.

La differenza enorme fra i 200 miliardi del Prof. Gini per il 1925, e la cifra che risulterebbe dalla capitalizzazione del reddito fondiario in base alla percentuale del Serpieri del 14,3 % sulla produzione lorda, la differenza, diciamo, apparirebbe ancora maggiore se si pensa che i 200 miliardi del Prof. Gini si riferiscono solo alla ricchezza terriera privata e non comprendono nè il valore del bestiame nè il valore della ricchezza terriera in mano di enti pubblici.

Ma prescindendo dai paragoni coi risultati del Prof. Gini, sebbene tali risultati siano parsi sempre attendibilissimi, il voler ammettere il reddito fondiario nella misura del 14,3% sul prodotto lordo, significherebbe ammettere che nel dopoguerra il valore della proprietà terriera si è quasi dimezzato. È chiaro, infatti, che se nell'anteguerra eminenti economisti e statistici erano d'accordo nel ritenere il reddito fondiario di una entità del 25% sulla produzione lorda ; e se nel dopoguerra tale reddito fondiario si è ridotto quasi della metà, anche il valore che, come è noto, nella cosa che lo possiede è in correlazione diretta sopratutto col rendimento che la cosa può dare, anche il valore, diciamo, dovrebbe risultare diminuito di quasi la metà o presso a poco, eccezione fatta delle influenze più o meno decisive che possono esercitare altri elementi sul valore di una cosa attraverso il tempo. Ora, che il valore della proprietà terriera espresso in termini monetari, sia, dall'anteguerra ad oggi, diminuito, è probabile, anzi è quasi certo ; ma che sia diminuito al punto da risultare quasi la metà di quello pre-bellico, è impossibile, per non dire assurdo.

Pertanto, dalle convinzioni che abbiamo potuto formarci sulla dinamica del reddito agricolo nei due periodi pre-bellico e post-bellico, durante il corso di questo lavoro, crediamo di poter stabilire con molta attendibilità, le seguenti percentuali di ripartizione del prodotto netto tra i diversi fattori della produzione :

Reddito di puro lavoro manuale	52 %
Remunerazione del lavoro di direzione e amministrazione	15 %
Interesse del capitale di esercizio	
Reddito fondiario	33 %

In base a tali proporzioni si avrebbe che dei 30 miliardi di reddito agricolo 15,6 miliardi rappresentano il reddito di puro

lavoro manuale; 4,5 miliardi la remunerazione del lavoro di direzione e amministrazione e, insieme, l'interesse del capitale di esercizio; e 9,9 miliardi il reddito fondiario. I 4,5 miliardi di remunerazione del lavoro di direzione e di amministrazione e del capitale di esercizio, si può ritenere che a loro volta si suddividano presso a poco in 1,5 miliardi di remunerazione del lavoro di direzione e di amministrazione, e 3 miliardi d'interesse del capitale di esercizio, con una percentuale quindi sul prodotto netto complessivo, rispettivamente, del 5 e del 10 %.

Le proporzioni in cui stanno, rispetto al prodotto netto, le remunerazioni dei diversi fattori economici che concorrono alla produzione, risultano, invece, rispetto al prodotto lordo, come segue:

Reddito di lavoro manuale	34-35 %
Remunerazione del lavoro di direzione e amministrazione	10-11 %
Interesse del capitale di esercizio	
Reddito fondiario	22-23 %

Il rimanente 32-33 % della produzione lorda rappresenta le spese.

Queste forme di distribuzione del prodotto dell'agricoltura, sia lordo che netto, fra le diverse categorie economiche della produzione, hanno solo valore approssimativo e servono, più che a indicare l'entità della quota spettante a ciascuna categoria, a mostrare il senso della variazione verificatasi nel periodo post-bellico.

Il problema in sè, come abbiamo sopra accennato, è così complesso e difficile che richiederebbe, per vero, una trattazione a parte, data anche la sua importanza, oltre che dal punto di vista economico, anche da quello sociale.

Il Reddito industriale e commerciale.

La determinazione dell'entità di questa specie di redditi nel complesso dei redditi della nazione, presenta non poche difficoltà, di cui la maggiore risiede nella natura stessa di tali redditi, natura oltremodo dinamica e complessa.

Se l'economia di una nazione potesse essere tutta basata, poniamo, o sull'agricoltura, o sull'industria, ecc., la determinazione del reddito, pur essendo difficile ugualmente, sarebbe però meno incerta in quanto i rapporti fra i diversi fattori della produzione ne rimarrebbero alquanto più semplificati e quindi più facilmente individuabili.

Ma questa non è che una troppo semplice, ipotetica condizione. In realtà, invece, l'esistenza di diverse forme di attività economiche che vivono e si sviluppano l'una accanto all'altra, creando delle interferenze, generando delle facili confusioni nella determinazione della natura di questo o quell'atto economico, complicando i rapporti stessi che intercorrono tra i diversi fattori della produzione, fa sì che la ricerca del reddito già di per sè ardua, diventi ancora più ardua e complessa. È, infatti, difficile, per non dire impossibile, segnare un limite netto e preciso tra i redditi provenienti da questa o quella branca dell'attività economica. Tutte queste difficoltà si sono ora più accentuate con l'intensificarsi delle relazioni commerciali tra le varie nazioni. La velocità degli scambi tra un paese e l'altro, la semplificazione delle forme di investimento di capitale, la più larga partecipazione del capitale estero nelle grandi imprese industriali e commerciali dei vari paesi, ha reso ancora più complessa, non solo la delimitazione tra redditi di varia provenienza, ma ha reso anche più difficile la determinazione dell'entità stessa di tali redditi.

Le condizioni in cui, in un paese come l'Italia, si svolge l'attività industriale e commerciale, condizioni di impiego e di sfruttamento del capitale, forme d'investimenti, mercato della mano d'opera, ecc., variano da tipo a tipo di azienda, da luogo a luogo, da regione a regione, ecc. Il valore e l'importanza stessa di questi elementi, assumono poi aspetti così vari e complessi, che anche nel tempo è difficile individuarne la portata.

La diversa distribuzione dei profitti determina una variabilità molto forte nel rendimento del capitale, ed esercita un'influenza non trascurabile sull'altezza stessa dei profitti in questo piuttosto che in quell'altro tipo di azienda. La diversa concentrazione dei capitali, strettamente connessa alla distribuzione dei profitti, costituisce un altro elemento di cui bisognerebbe tener conto nel calcolare il rendimento del capitale stesso investito, come bisognerebbe tener conto debitamente delle spese di primo impianto e delle spese di esercizio, nonchè di quella parte del reddito che non va nè agli imprenditori, nè agli azionisti o ad altri fattori della produzione, ma va invece a costituire le riserve.

Per poter calcolare il rendimento complessivo del capitale industriale e commerciale bisognerebbe, oltre tutto, calcolarne il valore; impresa questa non meno ardua e complessa. Nella moderna forma degli investimenti in società per azioni si ha che generalmente il valore del capitale industriale è rappresentato dal valore delle azioni. Ma di

quale valore bisognerà tener conto ? Del nominale o del reale ? E, se bisognerà tener conto del valore reale, è proprio vero, ed è vero per tutte le industrie che il valore di borsa corrisponda realmente al valore effettivo della società, dell'azienda ? Si potrà poi considerare come effettiva retribuzione del capitale impiegato nelle società il solo dividendo corrisposto a fine esercizio ? O non bisognerà piuttosto tener conto anche di altri elementi che potrebbero concorrere ad elevare o ad abbassare il dividendo preso come misura del rendimento netto del capitale azionario ?

Per il capitale commerciale, oltre alle difficoltà di ordine generale più sopra accennate, altre ve ne sono che rendono più ardua la determinazione del valore e del reddito da esso proveniente.

Come, infatti, calcolarne il valore ? Si dovrà tener conto anche delle giacenze, tali quali sono al momento del calcolo, o agli effetti della ricerca del reddito, bisognerà tener conto delle giacenze medie annuali ? Su quali criteri, poi, occorrerà basarsi per stabilire la misura della retribuzione del capitale commerciale, data la grande diversità delle aziende e la variabilità che detta misura subisce non solo attraverso il tempo, ma anche da luogo a luogo ?

Sono queste delle domande che esigerebbero delle risposte per poter ottenere una soddisfacente attendibilità nei risultati del calcolo del reddito industriale e commerciale, e invero, molti sono gli studiosi che hanno trattato, in parte, tali argomenti ; ma i pareri, le vedute, i risultati sono così disparati, e a volte contrari, che riesce difficile, se non impossibile, trarne una qualche conclusione. Se a ciò si aggiunge la scarsezza e la difettosità dei dati di cui si dispone, ci si renderà maggiormente conto delle difficoltà che presenta il problema del calcolo diretto del reddito industriale e commerciale.

Per tutte queste ragioni, tenteremo, dunque, un metodo semplice, che se non può considerarsi rigoroso o esatto, come sarebbe desiderabile, dà, però, allo stato delle cose, buon affidamento per giungere ad un risultato quanto più è possibile vicino alla realtà. Questo metodo, spesso adoperato in passato e in valutazioni regionali eseguite presso l'Istituto di Statistica della R. Università di Roma, è ora reso meno aleatorio dall'esistenza di un censimento industriale che, eseguito nell'ottobre del 1927 dall'Istituto Centrale di Statistica del Regno, ha messo a nostra disposizione una copiosa messe di dati e di notizie, veramente preziose.

Il metodo, dunque, si basa, essenzialmente, sull'ammontare dei redditi imponibili accertati dall'Amministrazione agli effetti della

imposta di Ricchezza Mobile, categoria *B*. Tale imposta, in tale categoria, colpisce il prodotto delle industrie e dei commerci, colpisce cioè i proventi derivanti a quelle imprese, individuali e collettive, che gestiscono fabbriche, cantieri, officine, miniere, manifatture, teatri, alberghi e ristoranti, luoghi di divertimento, di cura, magazzini di vendita all'ingrosso e al dettaglio, ferrovie, telefoni, trasporti automobilistici, tramviari, società di assicurazioni, ecc. ecc. Precisamente, ciò che l'imposta colpisce è il reddito netto, cioè tutto « ciò che rimane del valore di un prodotto, dedotte le spese strettamente attinenti alla sua produzione, come sarebbe il consumo delle materie greggie e degli strumenti, le mercedi degli operai, e il fitto dei locali occorrenti per l'esercizio dell'industria o del commercio (1) ».

Tale imponibile, per l'Italia, ammontava nel 1928, sia per i ruoli principali che quelli suppletivi, a 11.097 milioni circa. Questa cifra dovuta alla denuncia del contribuente, sia pure controllata dagli agenti del fisco, è indubbiamente assai inferiore al vero, a causa della evasione che in questo campo è davvero elevatissima, potendo verificarsi in tutte e tre le sue forme caratteristiche, e cioè sia come attenuazione di valore, sia come denuncia di false passività, sia, infine, come occultazione totale del valore stesso.

In un suo recente studio l'Einaudi (2) cerca di determinare quello che egli chiama « coefficiente legale di evasione » e cioè quella percentuale di evasione che il legislatore ha previsto allorchè ha determinato le differenti aliquote di imposizione per le quattro categorie della imposta. È noto, infatti, che l'aliquota non è unica per tutte le categorie, ma è in funzione, non solo del grado di godibilità del reddito per le diverse categorie, ma anche, sopratutto, in funzione della capacità evasiva per ciascuna categoria.

In funzione del grado di godibilità, l'aliquota di imposizione che è dell'8 % per i redditi di categoria *D*, dovrebbe essere, secondo l'Einaudi, dell'8,15 % per i redditi di categoria *B*. Ma il legislatore, per i redditi di quest'ultima categoria, ha stabilito, invece, un'aliquota del 14 %, perchè, mentre per i redditi di categoria *D* nessuna evasione è possibile, è più che possibile, invece, per i redditi di categoria *B*. E, poichè il rapporto tra l'aliquota dell'8 % stabilita per i redditi

---

(1) I. Tivaroni. *Compendio di scienza delle finanze*, Laterza, Bari, VII Ediz., 1929, pag. 296.

(2) L. Einaudi. *L'evasione all'imposta di Ricchezza Mobile*, in « Riforma Sociale », 1928.

di categoria *D*, e l'aliquota teorica dell'8,15 % per i redditi di categoria *B*, è uguale a 1.718, è chiaro che l'Amministrazione copre, con una maggiore altezza dell'aliquota, la perdita che ad essa deriverebbe dalla denuncia di una lira anzichè di 1,718. Il legislatore, cioè, ha ammesso tacitamente una evasione del 41.79 %. E, se le cose procedessero normali, finchè il contribuente di categoria *B* evade del 41,79 % sull'ammontare effettivo, o, ciò che fa lo stesso, del 71,80 % in funzione dell'ammontare denunziato, nulla perderebbe lo Stato.

Ma in realtà l'evasione è molto più forte di quella prevista dal legislatore. Infatti, è da osservare che se è vero che l'amministrazione riesce in parte a coprirsi con un'aliquota più alta delle perdite che ad essa deriverebbero dalla maggiore evasione che si verifica nei redditi di categoria *B*, non è men vero che l'evasione, essendo in diretta correlazione positiva con l'altezza delle aliquote di imposizione tanto più cresce, quanto più crescono le aliquote stesse.

D'altra parte, noi osserviamo, oggi è quasi unanime parere degli studiosi che l'evasione, espressa in funzione del valore denunciato, sia almeno del 50 % per quanto riguarda la denuncia del reddito degli immobili (terreni, fabbricati). Eppure è questo un campo in cui il controllo, essendo relativamente facile, viene esercitato, direi quasi, agevolmente dagli agenti del fisco, e quindi i valori accertati risultano molto meno lontani dal vero di quanto non risultino quelli accertati per i mobili. Inoltre, il fatto stesso della facilità del controllo, e il fatto che il reddito ritraibile da un immobile è, grosso modo, un po' noto a tutti, esercita una profonda azione psicologica sul contribuente, inducendolo, per evitare i possibili rigori della legge, a denunciare cifre che, se pur restano sempre inferiori al vero, sono almeno compatibili colle apparenze esteriori del suo stato economico.

È facilmente immaginabile, quindi, a quali altezze possa arrivare l'evasione in un campo quale è quello che noi stiamo osservando, in cui buona parte, se non la maggior parte dei redditi, è, per la sua stessa natura, facilmente occultabile, anche per intero, senza eccessivi timori.

Persone competenti, da noi interpellate al riguardo, ritengono che, per avere delle cifre corrispondenti in certo modo alla realtà, bisognerebbe sommare due, tre e, in qualche caso, anche quattro volte, l'imponibile accertato ai fini dell'imposta. Ciò è forse esagerato. Ma, ad ogni modo, è certo che anche noi, esaminando gli elenchi nominativi dei contribuenti per la Categoria *B*, pubblicati dal Ministero delle Finanze, ci siamo dovuta formare la convinzione che l'evasione è

molto più alta di quella che a prima vista possa sembrare. Persone ricche, notoriamente agiate, sono gravate da un imponibile ridicolmente al disotto del vero, mentre, per converso, in alcuni casi, pochi in verità, l'imponibile è parso, in qualche modo, corrispondere effettivamente alla posizione economica goduta dal rispettivo contribuente.

E, ciò che è opportuno rilevare, quest'ultimo caso si verificava più spesso, per non dire quasi esclusivamente, per i redditi bassi, mentre per i redditi alti, abbiamo potuto notare che più essi erano elevati e più appariva stridente il contrasto tra il reddito imponibile accertato e la notoria agiata posizione economica del contribuente. Ciò, del resto, trova la sua spiegazione in molte e svariate ragioni. Anzitutto è chiaro che quanto più il reddito è basso, per lo meno fino a un certo limite, tanto più è facilmente accertabile e controllabile.

Inoltre, quanto più cresce il reddito imponibile, e quindi l'imposta da pagare, tanto più aumentano le probabilità di evasione. Infine, mentre da una parte coloro che godono di redditi bassi devono, nella maggior parte dei casi, adattarsi all'accertamento, spesso rigoroso, imposto dagli agenti del fisco, non potendo per la scarsezza di mezzi assumersi il peso di un ricorso per vie legali che, con tutta probabilità, riuscirebbe loro sfavorevole; d'altra parte, invece, coloro che godono di redditi elevati, oltre ad avere la possibilità di contestare l'accertamento del fisco e di riuscire, quindi, ad evadere, sia pure sotto forma di attenuazione di valore o di denuncia di false passività, possono anche, in alcuni casi, sfruttare la stessa posizione sociale che loro deriva dall'elevatezza dei redditi.

Per tutte queste ragioni, fissando l'evasione nella misura dell'80 per cento in funzione però dell'ammontare accertato ai fini dell'imposta, crediamo di mantenerci in limiti piuttosto modesti, tenuto conto anche del fatto che in essa intendiamo includere tutti quei redditi che, per non raggiungere il minimo imponibile fissato in L. 1000, sono esenti dall'imposta stessa.

In base, dunque, a un'evasione dell'80 %, si ha che il reddito effettivo proveniente dalle industrie e dai commerci ammonta a 19.975 milioni circa.

Ma questo non è tutto il reddito industriale e commerciale. L'imposta di ricchezza mobile, infatti, nella categoria *B* colpisce soltanto il prodotto o reddito netto derivante all'industriale o al commerciante dall'impiego del capitale o del proprio lavoro. Rimangono escluse quindi tutte quelle spese che, pur rappresentando il costo di produzione e le spese d'esercizio, possono però costituire la remune-

razione di altre categorie di persone partecipanti alla produzione o a quella forma di attività economica che è il commercio.

Nel caso attuale, per ottenere il reddito complessivo derivante dalla industria e dal commercio, bisognerà aggiungere al reddito netto dell'industriale e del commerciante, i redditi di puro lavoro manuale e intellettuale, i redditi cioè del personale direttivo e amministrativo, quelli del personale tecnico e addetto alla vendita, e, infine, i redditi del personale operaio.

Calcoleremo tali redditi da lavoro con un metodo diretto, basandoci sul censimento industriale e commerciale eseguito, come già sopra è stato detto, dall'Istituto Centrale di Statistica del Regno, nell'ottobre del 1927.

Secondo tale censimento le persone addette all'industria al commercio ammontano complessivamente a 5.649.096, e sono ripartite in 1.557.225 esercizi.

Nei 731.888 esercizi industriali gli addetti sono 4.002.931, di cui sono operai veri e propri 2.906.201, e padroni 838.310. Per il rimanente, 190.704 rappresentano il personale direttivo e amministrativo, 34.793 il personale tecnico, e 32.923 quello addetto alla vendita.

Gli addetti al commercio ammontano, invece, a 1.646.165 e sono ripartiti in 825.337 esercizi. Degli addetti 307.069 sono operai, 987.329 padroni, mentre 162.239 rappresentano il personale direttivo e amministrativo, 7.448 quello tecnico e 182.080 quello addetto alla vendita.

Secondo un'indagine della Direzione Generale del Lavoro, del Credito e della Previdenza Sociale (ex Ministero dell'Economia Nazionale) eseguita in 5.059 stabilimenti industriali, rappresentanti le maggiori e più importanti industrie italiane, in cui sono occupati un milione circa di operai, il salario medio orario era nel marzo del 1928 di L. 2,01 e nel settembre dello stesso anno di L. 2, con un guadagno effettivo giornaliero, quindi, di L. 16 circa per ciascun operaio, ritenendo che il numero degli operai che lavorano con orario ridotto si compensi presso a poco col numero degli operai che lavorano con orario superiore al normale.

Calcolando in 280 le giornate lavorative dell'anno, escludendo cioè le domeniche e le altre feste, si arriva a un guadagno medio annuo per operaio di L. 4.480, vale a dire, a un guadagno globale, per i 2.906.201 operai, di poco più di 13 miliardi. Abbiamo ritenuto attendibile stabilire in 280 le giornate lavorative dell'anno, tenendo conto del fatto che, in base alla nuova legislazione sinda-

cale, le cause che potrebbero influire a ridurre il numero delle giornate di lavoro nell'anno, sono praticamente senza effetti. Gli scioperi, infatti, considerati reato, si può dire non esistano ; mentre in caso di malattia dell'operaio, purchè non si oltrepassino determinati limiti di durata, l'imprenditore è tenuto a corrispondere ugualmente il salario. Nè, salvo casi eccezionali, può avere una influenza sensibile la disoccupazione in quanto il numero degli addetti su cui noi ci siamo basati per i nostri calcoli, è, come già sappiamo, quello risultante dal censimento industriale e commerciale dell'ottobre 1927, ed ha quindi, per i criteri che ne hanno informato la rilevazione, un certo carattere di stabilità ; può cioè, esser considerato come la media degli addetti che normalmente sono occupati nelle industrie e nel commercio nel periodo oggetto del nostro esame.

Circa il guadagno del personale direttivo e amministrativo, di quello tecnico e addetto alla vendita, mancano dati ufficiali su cui basarsi. Tenendo però presente, come punto di riferimento, il guadagno medio orario degli operai, crediamo di non errare di molto stabilendo che il guadagno del personale delle categorie suddette può ritenersi, presso a poco, della misura media di L. 5 ad ora.

Tale guadagno potrà, forse, sembrare alquanto elevato per il personale addetto alla vendita, e un po' al disotto del vero per il personale direttivo, amministrativo e tecnico. Ma non bisogna dimenticare anzitutto che il guadagno medio orario da noi stabilito in L. 5 costituisce la media per l'insieme delle categorie suddette, e, in secondo luogo, che il personale addetto alla vendita nelle industrie non può essere considerato alla stregua degli operai o quasi, in quanto trattandosi di personale specializzato, ha bisogno, per poter esplicare la sua importantissima funzione, oltre che di particolari cognizioni tecniche, anche di un certo grado di elevatezza intellettuale. Basta pensare che la vendita nell'industria, oltre che all'interno, è fatta all'estero, e, quasi sempre, all'ingrosso, e quindi per somme piuttosto elevate.

In base, dunque, a un guadagno medio orario di L. 5, si ottiene un guadagno giornaliero di L. 40, vale a dire un guadagno annuo di L. 11.200 che corrisponde a un guadagno complessivo di 2 miliardi e 894 milioni, per le 258.420 persone componenti le categorie del personale direttivo, tecnico, amministrativo e addetto alla vendita.

Il reddito di puro lavoro manuale e intellettuale nelle sole industrie ammonta, dunque, a 15,9 miliardi circa.

Bisognerà ora calcolare quello proveniente dal lavoro nel commer-

cio. Manca qui qualsiasi dato o notizia, ufficiale o meno, intorno alla retribuzione delle diverse categorie di lavoratori. Dovremo perciò ricorrere a impressioni personali, a pareri di competenti e anche a congetture, tenendo però presente, come punto di riferimento e coi dovuti accorgimenti, la misura della retribuzione da noi stabilita per ogni categoria degli addetti all'industria.

Per quanto riguarda la categoria degli operai, osserviamo che nel commercio non si può parlare di operai nel senso in cui se ne parla, invece, nell'industria. Nel commercio, infatti, la categoria degli operai è rappresentata da lavoratori che hanno funzioni nettamente ausiliarie che non richiedono, come nell'industria, alcuna attitudine speciale e tanto meno cognizioni particolari.

Tali sono le categorie dei facchini, dei custodi di magazzino, dei commessi, degli addetti alla pulizia dei locali, dei fattorini, ecc. Per questi, quindi, la retribuzione non può corrispondere a quella degli operai nell'industria, ma deve, invece, essere inferiore. E, se nel 1928 le inchieste della Direzione Generale del Lavoro hanno accertato per gli operai nell'industria un guadagno medio orario di L. 2, per gli operai nel commercio crediamo si possa stabilire, con molta attendibilità, una retribuzione media oraria non superiore a L. 1,60. In base alla quale si ha un guadagno giornaliero di L. 12,80, ossia un guadagno annuo per ogni operaio di L. 3.584. Il reddito, cioè, derivante ai 307.069 operai, ammonta complessivamente a 1.101 milioni. Analoghe osservazioni, per quanto riguarda la differenza con la corrispondente categoria nelle industrie, si possono fare per il personale direttivo, tecnico e amministrativo, e per quello addetto alla vendita del commercio. Diverse sono le capacità direttive, tecniche e amministrative richieste in chi dirige o amministra un'azienda industriale, da quelle richieste in chi dirige o amministra, invece, un'azienda commerciale. Altro è provvedere al fatto produttivo ; altro è provvedere ad amministrare o vendere anche al minuto i vari prodotti. Diversa è quindi la retribuzione dovuta a coloro che esplicano funzioni così distinte.

Senza timore di allontanarci molto dal vero crediamo di poter fissare il guadagno medio orario in L. 3,60 per il personale direttivo, tecnico e amministrativo, e in L. 2,20 per il personale addetto alla vendita nel commercio.

Si ha così per il personale direttivo, tecnico e amministrativo un guadagno giornaliero in media di L. 28,80, un guadagno annuo cioè di L. 8.064, cui corrisponde, per le 169.687 persone componenti la categoria, un guadagno globale di 1.368 milioni.

Per il personale addetto alla vendita si ha, invece, un guadagno giornaliero di L. 17,60, cioè un guadagno annuo di L. 4.928 ; per cui il reddito complessivo di questa categoria, composta di 182.080 persone, ammonta a 897 milioni.

Nell'insieme, dunque, il reddito di puro lavoro manuale e intellettuale proveniente dai 658.836 addetti nel commercio, esclusi i padroni, ammonta a 3.366 milioni.

Ricapitolando, ora, i vari risultati ottenuti eseguendo i calcoli parziali dei vari elementi che compongono il reddito industriale e commerciale, si ha :

	in milioni
Reddito industriale e commerciale propriamente detto (prodotto netto derivante all'imprenditore dall'impiego del capitale e del proprio lavoro)	19.975
Reddito di puro lavoro manuale e intellettuale nelle industrie:	
Personale direttivo, tecnico, amministrativo e addetto alla vendita	2.894
Operai	13.000
Reddito di puro lavoro manuale e intellettuale nel commercio :	
Personale direttivo tecnico, amministrativo .	1.101
Personale addetto alla vendita	1.368
Operai	897
Totale . . .	39.235

Industria e commercio hanno prodotto, dunque, nel 1928, un reddito netto di oltre 39 miliardi. Vedremo in seguito come questa cifra, a nostro modo di vedere, possa esser considerata effettivamente attendibile.

Per ora sarà interessante, e importante nello stesso tempo, calcolare quanti, di questi più che 39 miliardi di reddito, sono prodotti dall'industria e quanti dal commercio.

Già sappiamo, per i redditi di puro lavoro manuale e intellettuale, quanti ne produca l'industria e quanti il commercio. Resta quindi soltanto da esaminare come si distribuiscono, fra le due importanti attività economiche, i 19.975 milioni di prodotto netto derivante all'industriale e al commerciante dall'impiego del capitale e del proprio lavoro.

Il problema presenta, per molti aspetti, numerose e varie difficoltà. Pochi, infatti, sono i dati di cui si dispone, incerti e frammentari gli elementi su cui basarsi.

In una prima approssimazione, crediamo possa servire utilmente allo scopo il criterio della proporzione in cui stanno, rispetto al totale, addetti alla industria e addetti al commercio.

Vediamo, infatti, che su un totale di 5.649.096 addetti, gli addetti alla sola industria, ammontando a 4.002.931, rappresentano il 70,86 % e, conseguentemente gli addetti al commercio, che ammontano a 1.646.165, rappresentano il 29,14 %. Addetti al commercio e addetti all'industria stanno cioè, fra loro in un rapporto come da 1 a 2,43.

In base a queste proporzioni si avrebbe che dei 19.975 milioni del prodotto netto derivante all'industriale e al commerciante dallo impiego del capitale e del proprio lavoro, 14.154 milioni rappresenterebbero la parte dell'industria e 5.821 milioni la parte del commercio.

Il procedimento seguito si basa sul principio che la quantità di reddito, a parità di altre condizioni, sia maggiore o minore là dove è maggiore o minore il numero degli addetti. Tale principio, se in linea generale, per ovvie ragioni, può considerarsi sostanzialmente vero, non può, però, agli effetti della discriminazione del reddito commerciale da quello industriale, essere accettato integralmente, senza tener presenti alcune circostanze che nel fatto possono infirmare il principio stesso, falsando conseguentemente i risultati che dalla sua applicazione derivano. Pigliando in considerazione gli elementi fondamentali del reddito, cominciamo col notare, sia per quanto riguarda il capitale, sia per quanto riguarda il lavoro, che diverse sono le leggi conomiche cui essi sono sottoposti, e nell'industria e nel commercio, e diversi sono gli effetti per ciò che concerne la formazione del reddito nelle due branche dell'attività economica.

Bisogna, anzitutto, rilevare che, perchè il procedimento da noi seguito potesse portare a risultati esatti, sarebbe stato necessario che ad ogni addetto corrispondesse sia nell'industria che nel commercio un'uguale quantità di capitale con un uguale rendimento proporzionale, o, quanto meno, perchè il reddito potesse essere proporzionale al numero egli addetti, così come noi abbiamo supposto, sarebbe stato necessario che il rendimento del capitale fosse stato maggiore là dove il capitale era minore, o minore là dove il capitale era maggiore.

Senonchè la prima di queste ipotesi, relativa alla quantità di

capitale corrispondente a ogni addetto, non regge all'esame dei fatti, nella realtà.

Infatti, per ciò che concerne l'elemento « capitale » si può osservare che la quantità di esso corrispondente ad ogni addetto, lungi dall'essere uguale nell'industria e nel commercio, è maggiore nel commercio che nell'industria.

Gli esercizi commerciali, infatti, per la loro stessa natura, pur potendo rappresentare delle somme ingenti di capitale, come le imprese industriali, richiedono però per la normale amministrazione, un numero di addetti certamente minore di quello che può essere richiesto invece da un esercizio industriale rappresentante una somma di capitale di uguale entità. La ragione di questa differenza è ovvia ; altro è produzione, altro amministrazione, e diverso è, quindi, il numero degli addetti che sono necessari a provvedere all'impiego produttivo di un certo capitale, dal numero degli addetti che sono necessari ad amministrare lo stesso capitale.

Questa differenziazione nel numero degli addetti necessari tanto più si accentua quanto più il capitale dell'azienda è elevato. È chiaro infatti che per piccoli capitali, sia nell'industria che nel commercio, la differenziazione nel numero degli addetti necessari non può che essere minima, e in certi casi addirittura nulla. Ora, poichè il caso di aziende con capitali elevati è più frequente nell'industria che nel commercio, ne deriva che, nelle aziende industriali, la concentrazione degli addetti è maggiore che nelle aziende commerciali ; essa, precisamente, è più che proporzionale alla concentrazione che si verifica nelle aziende commerciali, a parità di capitale.

Dicevamo sopra, agli effetti della distribuzione degli addetti riguardo al capitale, che altro è produzione altro è amministrazione pura e semplice. E, infatti, mentre un solo addetto nell'industria non può provvedere all'impiego produttivo del capitale che per una quantità necessariamente molto limitata, nel commercio, invece, un solo addetto, e il caso è frequente, può provvedere all'amministrazione di capitali spesso rilevanti, e, ad ogni modo, certamente superiori a quelli che corrispondono ad un addetto nell'industria.

È, insomma, la legge della divisione del lavoro che ha piena applicazione in questo campo.

La varietà e la molteplicità delle operazioni e delle attitudini richieste dal fatto produttivo, portano ad una specializzazione sempre crescente delle funzioni da esplicare, e quindi, ad un maggior numero di elementi necessari alle funzioni stesse ; mentre nel commercio,

tale specializzazione è molto più ridotta e quindi il numero degli addetti, richiesti dalle funzioni stesse, minore.

Scendendo a considerare in particolare i risultati del censimento industriale e commerciale dell'ottobre 1927, per suffragare maggiormente la nostra ipotesi notiamo che gli esercizi con pochi addetti sono molto più frequenti nel commercio che nell'industria. Infatti, di 1.452.173 esercizi, con un numero di addetti non superiore a cinque, 800.626 cioè il 55,13 % appartengono al commercio e 651.547, cioè il 44.87 % all'industria.

Osservando, invece, gli esercizi con un numero di addetti superiore a 5, notiamo che il numero degli esercizi stessi è maggiore nell'industria che nel commercio. E ciò avviene per tutte le classi di esercizi, ripartite in base al numero degli addetti.

Sintomatico è anzi, a questo riguardo, il fatto che per le due ultime classi di esercizi (addetti da 501 a 1000 e oltre 1000) la superiorità dell'industria è molto più accentuata che nelle classi precedenti. Infatti, mentre nel commercio gli esercizi con addetti da 501 sino a 1000 sono appena 14 e quelli con oltre 1000 appena due, nell'industria sono rispettivamente 471 e 224.

Accertato, dunque, che la quantità di capitale corrispondente ad ogni addetto è maggiore nel commercio che nell'industria, ammettendo nel capitale un rendimento proporzionale, sia nell'industria che nel commercio, si avrebbe che i risultati da noi ottenuti in base al noto procedimento della proporzione esistente tra gli addetti nelle due branche di attività economica, sarebbero, per quanto riguarda l'industria, leggermente superiori al vero, e, per converso, per quanto riguarda il commercio, leggermente inferiori al vero.

In sostanza però vi sono due circostanze che concorrono a modificare sensibilmente questo risultato. Anzitutto il rendimento del capitale che è maggiore nell'industria anzichè nel commercio, e, in secondo luogo, la remunerazione del lavoro dell'industriale che è maggiore della remunerazione del lavoro del commerciante.

Per poter determinare con esattezza l'influenza di queste due circostanze agli effetti della descriminazione del reddito industriale da quello commerciale secondo il procedimento da noi seguito, bisognerebbe poter conoscere di quanto il rendimento del capitale nella industria è maggiore del rendimento del capitale nel commercio, e di quanto la rimunerazione del lavoro dell'industriale è superiore alla remunerazione del lavoro del commerciante. Operazioni queste che per la loro complessità richiedono la disponibilità di molti elementi

che allo stato della rilevazione statistica mancano. Ci sarà sufficiente ad ogni modo, agli effetti dei risultati del nostro procedimento, rilevare soltanto il senso in cui agiscono le due circostanze su accennate.

E poichè sappiamo che la quantità di capitale corrispondente a ogni addetto è maggiore nel commercio che nell'industria, si ha che il maggior rendimento del capitale e del lavoro nell'industria tende ad attenuare la differenza proporzionale che si avrebbe tra il reddito industriale e il reddito commerciale, ripartiti tenendo conto soltanto dell'importanza numerica degli addetti esistenti nelle due grandi branche dell'attività economica separatamente. Si avrebbe cioè che il reddito industriale, in realtà sarebbe superiore a quanto risulta dal nostro procedimento, mentre il reddito commerciale sarebbe, invece, più basso.

Ma di quanto è superiore il reddito industriale alla cifra di 14.154 milioni da noi ottenuta in una prima approssimazione ? E di quanto è, invece, inferiore il reddito commerciale ai 5.821 milioni che noi abbiamo calcolato ?

È ciò che tenteremo di sapere seguendo un procedimento analogo al precedente, ma che si basa, anzichè sulla proporzione in cui stanno, rispetto al totale, addetti all'industria e addetti al commercio, sulla proporzione esistente tra i redditi di puro lavoro manuale e intellettuale nelle due grandi branche dell'attività economica nazionale.

Tali redditi, come già sappiamo, ammontano, complessivamente, a 19.260 milioni circa di cui 15.894 milioni, cioè l'82,52 % prodotti dal puro lavoro manuale e intellettuale nelle industrie, e 3.366 milioni cioè il 17,48 % prodotti dal puro lavoro manuale e intellettuale nel commercio. Essi cioè stanno fra loro nella proporzione di 4,73 a 1.

Supponendo ora che il prodotto netto dell'industria e il prodotto netto del commercio stiano nella stessa proporzione, si avrebbe che dei 19.975 milioni di reddito industriale e commerciale insieme, 16.483 milioni rappresenterebbero la parte spettante all'industria e 3.492 la parte spettante al commercio.

Questi risultati accusano, noi pensiamo, il vizio del procedimento, nel senso che, contrariamente a quanto avveniva seguendo il criterio della proporzione esistente tra gli addetti, mostrano alquanto elevato il reddito industriale e, conseguentemente, alquanto basso il reddito commerciale.

Il procedimento da noi seguito, infatti, mentre elimina l'inconveniente presentato dal precedente, nel senso che tiene conto della mag-

giore altezza dei profitti e della più elevata remunerazione del lavoro nelle industrie, presuppone però che la differenza di intensità che si riscontra tra la remunerazione del lavoro nell'industria e la remunerazione del lavoro nel commercio, si riscontri anche tra la remunerazione del capitale nell'industria e nel commercio separatamente. Ciò, in realtà, non si verifica, diverse essendo le leggi economiche cui è sottoposto il capitale nell'industria e nel commercio, da quelle cui è, invece, sottoposto il lavoro.

Nel caso, noi pensiamo, poichè la remunerazione del lavoro nell'industria, rispetto alla remunerazione del lavoro nel commercio, è più che proporzionale alla remunerazione del capitale, si è verificato che i risultati del nostro procedimento, basato sulla proporzione in cui stanno, nelle due attività economiche, i redditi di lavoro, sono apparsi più elevati per l'industria e alquanto bassi per il commercio.

Tuttavia la differenza d'intensità che si riscontra tra remunerazione del lavoro e remunerazione del capitale rispettivamente nella industria e nel commercio, non è così forte da portarci a risultati molto distanti dal vero, chè anzi essa, noi crediamo, può essere agevolmente corretta in base a considerazioni di ordine generale.

Infatti, se è vero che capitale e lavoro, agli effetti del reddito, sotto l'influenza di leggi economiche diverse si comportano diversamente, non è men vero che esiste fra queste leggi economiche una forte correlazione, nel senso che esse sono strettamente connesse fra loro, e così in dipendenza le une dalle altre che agiscono, spesso, sotto lo stimolo di una causa comune, e nella stessa direzione.

Tenendo presente dunque che il reddito industriale, in base al primo procedimento, corrispondeva a una cifra di 14.154 milioni, e che questa cifra, in base alle considerazioni fatte a proposito del rendimento del capitale e del lavoro dell'industriale, avrebbe dovuto essere aumentata, e considerato anche che la cifra che abbiamo ottenuto seguendo il secondo procedimento è di 16.483 milioni, cifra che, in base alle considerazioni fatte dovrebbe essere diminuita, crediamo di essere nel vero, ammettendo, per seguire una via di mezzo, una cifra non superiore ai 16 miliardi, come ammontare del reddito industriale nel 1928.

Analogamente per il reddito commerciale, poichè il risultato ottenuto seguendo il primo procedimento è stato di 5.821 milioni, cioè superiore al vero, come abbiamo potuto osservare, e poichè la cifra di 3.492 milioni, ottenuta in base al secondo procedimento, abbiamo constatato essere, invece, inferiore al vero, crediamo di

avvicinarci quanto più è possibile alla realtà, fissando quale ammontare del reddito commerciale nel 1928, una cifra di circa 4 miliardi.

Aggiungendo ora alle due cifre esprimenti il reddito industriale e commerciale separatamente, i rispettivi redditi di puro lavoro manuale e intellettuale, calcolati in 15.894 milioni per l'industria e in 3.366 milioni per il commercio, otteniamo, anche per questa via, che il reddito complessivo industriale ammonta a 32 miliardi circa e quello commerciale a poco meno di 7.4 miliardi.

La soddisfacente concordanza che si riscontra in questi risultati, ottenuti seguendo procedimenti diversi, ci autorizza a credere di esserci avvicinati, per quanto era possibile, alla realtà.

Vogliamo ora, infine, controllarli in base ai risultati ottenuti dal Prof. Gini per il 1925.

Per quanto riguarda il reddito industriale complessivo osserviamo che, per tale anno, il Prof. Gini stabiliva una cifra di 36 miliardi.

Nel 1928, tale entità di reddito, espressa nei termini monetari correnti, non può esservi stata. È questa una osservazione fondamentale che può essere fatta anche osservando semplicemente la sensibile differenza dell'indice dei prezzi delle merci all'ingrosso nei due periodi oggetto di esame. Del resto la profonda differenza nella situazione economica dei due anni in considerazione, risulta anche da tutti gli altri indici del movimento economico italiano, ed è dovuta, sopratutto, alle conseguenze della crisi di rivalutazione e stabilizzazione della moneta, che, dove più, dove meno, furono avvertite in tutte le branche dell'attività economica nazionale.

Anche l'agricoltura ne ha risentito, e, come abbiamo già visto, il reddito, nel 1928, rispetto al 1925, è diminuito del 6,25 %.

Per poco che ammettessimo per il reddito industriale una riduzione di uguale entità, otterremmo che i 36 miliardi del Prof. Gini per il 1925 si sarebbero ridotti, nel 1928, a 33.7. Senonchè la diminuzione verificatasi nel reddito industriale, nel periodo in considerazione, dev'essere stata, per un complesso di ragioni, molto maggiore di quella riscontrata nel reddito agricolo. L'industria, infatti, ha risentito con intensità maggiore e con più immediatezza che non l'agricoltura le conseguenze della crisi determinata dal processo di rivalutazione e stabilizzazione della moneta. La restrizione del credito e l'elevato costo del denaro da una parte, la concorrenza estera e l'improvvisa contrazione dei consumi dall'altra, rendendo più difficile l'adeguamento dei costi di produzione al nuovo valore della moneta,

hanno provocato condizioni di forte disagio che aggravate dalla persistente discesa dei prezzi hanno continuato a far sentire, sia pure con intensità decrescente, la loro influenza sfavorevole sul regolare svolgersi dell'attività produttiva. Basti, del resto, pensare che, dal 1925 al 1928, mentre i prezzi delle derrate alimentari sono diminuiti solo del 14,82 %, quelli delle materie industriali sono diminuiti invece, del 27,68 %, cioè poco meno del doppio.

Se noi quindi ammetteremo per il reddito industriale una diminuzione, rispetto al 1925, di poco meno del doppio di quella riscontrata per il reddito agricolo, una diminuzione cioè dell'11-12 %, crediamo di non poter errare di molto, ma di poterci invece avvicinare, per quanto è possibile, alla realtà.

Eseguendo la semplice operazione, otteniamo, dunque, sui 36 miliardi del Prof. Gini, per il 1925, una diminuzione di 4 miliardi circa, in base alla quale il reddito industriale complessivo risulterebbe, per il 1928, di 32 miliardi circa.

Per quanto riguarda il reddito del commercio, per poter eseguire il confronto colla cifra relativa del Prof. Gini, dato che questa è conglobata col reddito proveniente dal credito, è necessario determinare, ora, anche tale reddito.

Eseguiremo, a questo scopo, un calcolo diretto, basandoci sui pochi ed incerti elementi di cui disponiamo, e senza nasconderci che la scarsità e l'incertezza di tali elementi costituiscono degli ostacoli difficilmente sormontabili agli effetti dell'approssimazione al vero del risultato.

Rientrano, dunque, nella categoria oggetto della nostra ricerca, i redditi derivanti dall'impiego di puro capitale, limitatamente però a quei redditi provenienti dai depositi fruttiferi e dai conti correnti presso le Casse Postali e Ordinarie di risparmio, presso i principali Istituti di credito, presso le Banche popolari e regionali, ecc. Vi rientrano inoltre gli interessi dei crediti ipotecari e chirografari, dei crediti cambiari, ed altri redditi simili.

Sono esclusi, invece, per essere stati calcolati a parte, i redditi provenienti da titoli di qualsiasi genere, i premi dei prestiti dello Stato, Provincie, Comuni ed altri Enti, i premi delle lotterie e tombole, le vincite del pubblico gioco del lotto, i sussidi, concorsi e contributi pagati dallo Stato, Provincie, Comuni ed altri Enti e individui, ecc.

Delle varie specie di reddito, che rientrano nella categoria oggetto della nostra ricerca, alcune sono facilmente determinabili, conoscendosi oltre alla forma dell'investimento anche l'ammontare

del capitale investito e il relativo saggio d'interesse; altre, invece, presentano difficoltà, talvolta insuperabili, per cui, spesso, è d'uopo ricorrere a ipotesi e congetture che, come s'intende facilmente, vanno a scapito dell'attendibilità del risultato.

Possiamo, intanto, iniziare il calcolo delle varie specie di reddito del credito, osservando, per quanto riguarda i depositi fruttiferi, sia presso le Casse Postali e Ordinarie di risparmio, sia presso le varie banche popolari e regionali, sia presso i principali Istituti di Credito, che la statistica ufficiale ci dà di mese in mese l'ammontare e, in alcuni casi, anche il saggio d'interesse pagato. Agli effetti del nostro calcolo, e allorchè sarà possibile, ci baseremo, per ovvie ragioni, anzichè sull'ammontare a fine anno, sull'ammontare medio dell'anno stesso. Ecco, ad ogni modo, l'ammontare complessivo dei depositi fruttiferi in Italia nel 1928, così come noi l'abbiamo calcolato, ripartito secondo la natura degli Istituti Bancari e di Credito.

Depositi fruttiferi	Ammontare medio nell'anno 1928 (milioni di lire)
Casse postali:	
Credito dei depositanti sui depositi a risparmio	10.332,6
Credito dei depositanti sui depositi in c/c . . .	182,8
Casse ordinarie di risparmio:	
Credito dei depositanti sui depositi a risparmio .	12.695,6
Credito dei depositanti sui depositi in c/c . . .	1.583,0
Banche ordinarie di credito: (1)	
Credito dei depositanti	3.671,2
Principali banche popolari: (2)	
Credito dei depositanti	980,7
Principali banche regionali: (3)	
Credito dei depositanti	4.003,8
Monti di pietà: (4)	
Credito dei depositanti sui depositi a risparmio .	589,8
Credito dei depositanti sui depositi in c/c . . .	268,8
Da riportare . . .	34.308,3

(1) Banca Commerciale, Credito Italiano, Banco di Roma, Banca Nazionale di Credito, Banca Agricola Italiana, Banca d'America e d'Italia.

(2) Le tre maggiori Banche popolari: Banca Popolare Cooperativa Anonima di Novara, Banca Popolare di Milano, Banca Popolare di Cremona.

(3) Circa 40 istituti bancari (38).

(4) 23 principali istituti.

Depositi fruttiferi	Ammontare medio nell'anno 1928 (milioni di lire)
Riporto . . .	34.308,3
Banco di Napoli (1)	
Depositi in c/c fruttifero	1.148,6
Banco di Sicilia : (1)	
Depositi a risparmio	593,9
Depositi in c/c	85,1
Istituto di emissione : (1)	
Depositi in c/c fruttifero	1.525,2
	37.661,1

Complessivamente la somma dei depositi fruttiferi da noi considerati ammonta a 37.661 milioni circa.

Questo risultato se sembra, ed è, attendibile, anche perchè corrisponde esattamente alla cifra ufficiale (2), ha bisogno però di alcune precisazioni e correzioni.

Notiamo anzitutto che nei depositi fruttiferi così come noi li abbiamo calcolati e come risultano dalla cifra complessiva della statistica ufficiale, possono esservi compresi dei depositi in titoli, il cui reddito noi abbiamo calcolato a parte. Mentre, infatti, per le Casse postali e Ordinarie di risparmio, per i Monti di Pietà e per qualche altro istituto, ci è stato possibile tener conto della natura dei depositi ed escludere quindi quelli che non interessavano il nostro calcolo, nessuna distinzione abbiamo potuto fare per i depositi presso le banche ordinarie di credito, nè per quelli presso le banche popolari e regionali, nè per quelli presso altri Istituti. La circostanza, ad ogni modo, agli effetti del nostro calcolo non può aver che una portata molto limitata, in quanto i depositi in titoli presso gli enti bancari suddetti non rappresentano che una parte irrilevante sul complessivo valore dei depositi fruttiferi. Nelle Casse ordinarie di risparmio e nei Monti di Pietà essi, infatti, corrispondono rispettivamente al 5,30 e al 12,72%, conglobati però con i depositi di altra specie.

---

(1) Ammontare a fine anno.

(2) Bollettino mensile di statistica dell'Istituto Centrale di Statistica del Regno, Anno IV, 1929.

Vedi anche : Comitato per gli indici del Mov. Econ. Ital. « L'Economia Italiana dal 1919 al 1929 ». Tavole statistiche, pag. 127.

Circa il valore effettivo della cifra di 37.661 milioni cui noi siamo giunti quale ammontare dei depositi fruttiferi nel 1928, bisogna poi rilevare anche che può verificarsi il caso che nei depositi presso le principali Banche e Istituti di Credito siano compresi depositi fatti da altri enti bancari minori ; nel qual caso, il reddito che ne deriva, andando appunto a beneficio di tali enti bancari, è stato già da noi compreso nei redditi commerciali.

Ma anche questa circostanza non ha influenza decisiva agli effetti del nostro calcolo, l'errore che ne deriva, restanto più che compensato dal non essere inclusi, nella cifra complessiva dei depositi da noi calcolata, i depositi fruttiferi di numerosi altri enti e istituti bancari minori, trascurati dalla rilevazione statistica.

Per questa ragione anzi, noi crediamo che una cifra di 40 miliardi quale valore complessivo di tutti i depositi fruttiferi fatti in Istituti o enti bancari del Regno, possa dare, in modo più adeguato, l'idea dell'entità effettiva dei depositi stessi.

Tenendo presente ora che l'interesse corrisposto dalle Casse Postali sui depositi a risparmio è stato nel 1928 del 2,76 % e che quello delle Casse Ordinarie di Risparmio e delle Banche Ordinarie di Credito è stato, invece, nello stesso periodo, del 3,50-4 %, e considerato che gli altri istituti o enti bancari, in un periodo in cui il saggio ufficiale dello sconto è stato in media del 5,50-6 %, e il saggio dello sconto privato del 5,25-5,50 %, difficilmente avrebbero potuto accordare un saggio di interesse superiore in media al 4,50, massimo 5,50 %, si può, senza tema di errare eccessivamente, ammettere, per la massa complessiva dei depositi fruttiferi, un saggio medio del 4 %.

Tale saggio resta maggiormente giustificato dal fatto che nella cifra di 40 miliardi dei depositi fruttiferi da noi calcolata, sono compresi anche i depositi in conto corrente, i quali notoriamente godono di saggi di interesse molto più bassi.

In base a tale saggio il reddito derivante dalla massa dei depositi fruttiferi ammonterebbe per il 1928 a 1 miliardo e 600 milioni circa.

Per quanto riguarda i crediti ipotecari, cambiari, chirografari, e d'altra specie, è necessario anzitutto determinare il loro ammontare.

La mancanza assoluta di dati, o la mancanza di dati recenti, ci impedisce di eseguire il calcolo con quella attendibilità che sarebbe necessaria. Tuttavia, basandoci, dopo averli ben ponderati, sui pochi elementi disponibili, e utilizzando con le dovute cautele quanto può eventualmente essere stato fatto in precedenza in questo campo, cercheremo di ottenere nei risultati la maggiore approssimazione al

vero, evitando, nei limiti del possibile, di ricorrere a ipotesi e congetture.

Per i crediti ipotecari ci è di valido aiuto un calcolo eseguito appunto per il 1928 dal DEGLI ESPINOSA, a proposito del calcolo della ricchezza privata degli italiani (1). Secondo questo autore, il credito ipotecario dei privati ammonterebbe a 8.700 milioni (2). Sono ovvie le ragioni per cui ci basiamo sul credito e non sul debito ipotecario e le ragioni per cui ci basiamo sul credito dei privati soltanto. È questo soltanto, infatti, che interessa la nostra ricerca in quanto gli eventuali redditi di crediti ipotecari a favore di istituti bancari o altri enti, sono già stati da noi calcolati e compresi nei redditi commerciali.

Ammettendo dunque sugli 8.700 milioni di credito ipotecario dei privati, un saggio medio di interesse del 6 % circa, otteniamo un reddito di 500 milioni in cifra tonda.

Per i crediti cambiari, il calcolo presenta maggiori difficoltà e incertezze. Il DEGLI ESPINOSA per il 1928 calcolava il debito cambiario a carico dei privati a 6 miliardi circa (3). Quale sarà stato allora il credito cambiario dei privati? Per poterlo stabilire dobbiamo ricorrere a una ipotesi di dubbia attendibilità, ma che, d'altra parte, è l'unica possibile. Possiamo cioè supporre che il rapporto tra valore del debito ipotecario e valore del credito ipotecario, sia lo stesso di quello che corre tra valore del debito cambiario e valore del credito cambiario. È, poichè, sempre secondo il DEGLI ESPINOSA, il debito ipotecario a carico dei privati era nel 1928 di 14.500 milioni, si avrà che :

$$14.500 : 8.700 = 6.000 : x$$

in cui x, cioè valore del credito cambiario dei privati è uguale a 3.600 milioni. Crediamo questa cifra attendibile. Ammettendo anche qua, come per i crediti ipotecari, un saggio medio di interesse del 6 % si ha un reddito di 216 milioni o 200 in cifra tonda.

Per i crediti chirografari il calcolo riesce ancora più difficile e incerto che per le altre due categorie di crediti. Mancano infatti gli elementi necessari, o, se esistono, sono di data molto anteriore a

---

(1) A. DEGLI ESPINOSA. *La ricchezza privata degli Italiani nel* 1928, «Metron», Vol. VIII, n. 1-2 del 30 giugno 1929.

(2) A. DEGLI ESPINOSA. *La ricchezza*, etc. Op. cit. pag. 49 (Estratto).

(3) A. DEGLI ESPINOSA. *La ricchezza* etc... Op. cit.

quella che riguarda la nostra ricerca. Potremo tuttavia procedere a una stima molto approssimativa, sia basandoci su tali elementi, sia tenendo presente come punto di riferimento i risultati dei due calcoli sopra eseguiti, relativamente ai crediti ipotecari e cambiari.

Nel 1908, dunque, il PRINCIVALLE (1) a proposito della ricchezza privata degli Italiani, calcolava i crediti chirografari tra privati a 864 milioni, seguendo un procedimento che, per lo scopo che si prefiggeva, di determinare cioè le passività della ricchezza dei privati, non era punto corretto, e, in questo senso, fu giustamente criticato dal Prof. GINI (2).

Agli effetti del nostro calcolo però la cifra del PRINCIVALLE, in mancanza d'altro, costituisce già una prima approssimazione. Noi quindi, tenendo conto che egli l'ha ottenuta basandosi sull'imposta di ricchezza mobile Categoria A_2 e che ha trascurato di integrarla con quei crediti dei privati verso altri privati che sfuggono all'imposta stessa, siamo sicuri di non errare di molto elevandola per il 1914 a 1 miliardo, concordando in ciò col Prof. GINI il quale asseriva che i crediti chirografari dei privati stanno molto al di sopra degli 800 o 864 milioni calcolati dal PRINCIVALLE (3).

Per risalire ora dalla cifra di 1 miliardo che riguarda il 1914, al suo presumibile ammontare nel 1928, non ci resta che ricorrere, come già per i crediti cambiari, a una ipotesi, anch'essa di dubbia attendibilità, ma che è l'unica plausibile a nostra disposizione.

Supporremo cioè che nei due periodi in considerazione, il rapporto tra crediti chirografari e depositi fruttiferi appartenenti ai privati, si sia mantenuto inalterato. Prima di procedere alla semplice operazione bisogna però calcolare quanti dei 40 miliardi di valore complessivo dei depositi fruttiferi, appartengano ai privati. Come ha dimostrato il Prof. GINI (4) tale parte può ritenersi corrispondente ai 9/10 circa del valore complessivo, e cioè nel nostro caso, a 36 miliardi.

Eseguendo ora l'operazione, in base all'ipotesi fatta sopra, si avrà che:

$$1.000 : 7.100 \times x : 36.000$$

in cui, come è facile intendere, i due termini del primo rapporto sono

---

(1) L. PRINCIVALLE. *La ricchezza privata in Italia.*

(2) C. GINI. *L'ammontare e la composizione della ricchezza delle nazioni*, Torino, Bocca, pag. 178.

(3) C. GINI. *L'ammontare e la composizione*, ecc. Op. cit., pag. 178.

(4) C. GINI. *Problemi sociologici della guerra.* Zanichelli, Bologna, pag. 273.

l'uno, cioè il primo (1000 milioni) l'ammontare secondo il nostro calcolo dei crediti chirografari dei privati nel 1914, e l'altro, cioè il secondo, l'ammontare dei depositi fruttiferi dei privati nello stesso anno, secondo il Prof. GINI (1).

Risolvendo la semplice proporzione si avrà che x, cioè il valore dei crediti chirografari nel 1928, che noi andiamo cercando, è uguale a 5 miliardi circa. Tale somma ad un interesse medio del 6 % dà un reddito di 300 milioni.

Sommando ora i vari risultati ottenuti eseguendo i singoli calcoli parziali, possiamo formare il prospetto seguente:

	(Milioni di Lire)
Redditi provenienti dai depositi fruttiferi	1.600
» » » crediti ipotecari	500
» » » crediti cambiari	200
» » da crediti chirografari e d'altra specie	300
Totale redditi dal credito . . .	2.600

Il reddito del credito in Italia, nel 1928, è dunque di poco superiore ai 2 miliardi e mezzo. Il metodo analitico e spesso rigoroso con cui è stato condotto il calcolo, se non autorizza a dare a questa cifra valore assoluto, fa ritenere però che la verità non può essere eccessivamente lontana.

Aggiungendo, dunque, ai 7,4 miliardi di reddito commerciale precedentemente calcolati, i 2,6 miliardi di reddito del credito, otteniamo per il 1928 una cifra complessiva, per il reddito del commercio e credito insieme, di 10 miliardi circa, otteniamo, cioè una cifra che è solo leggermente inferiore a quella di 11 miliardi stabilita dal Prof. GINI per il 1925.

Ciò potrà, a prima vista, sembrar strano, data la stridente differenza che si riscontra nella situazione economica generale dei due anni in considerazione. Bisogna però osservare, per quanto riguarda il commercio, il cui reddito costituisce la maggior parte dei 10 miliardi, che se è vero che esso ha risentito della peggiorata situazione nel 1928, e che, più che altro, ha risentito della contrazione dei consumi, e della discesa dei prezzi che rendeva aleatorie le operazioni commerciali stesse, non è men vero che le ripercussioni che ha dovuto sopportare

(1) C. GINI. *Problemi*, etc. op. cit., pag. 256.

sono state, per forza di cose, meno gravi e meno intense che nell'industria. Il commercio, infatti, ha potuto adeguarsi con meno disagio e più rapidamente alla nuova situazione e al nuovo valore della moneta, non essendo stato frenato nella sua attività dai rigidi limiti imposti dal costo di produzione, come è avvenuto, invece per l'industria.

Se guardiamo, infatti, il volume complessivo degli scambi con l'estero nel 1928, troviamo che esso, pur risultando inferiore a quello dei due anni 1925 e 1926, si mantiene però a un livello soddisfacente, segnando anzi un certo miglioramento rispetto all'anno precedente. Mentre, infatti, nel 1927 il volume degli scambi è stato di 36 miliardi, nel 1928 è stato di 36.571 milioni, con un incremento, quindi, dell'1,58 % circa, incremento che acquista un valore e un significato notevole quando si pensi che si è potuto verificare nonostante l'influenza decisamente sfavorevole della discesa dei prezzi.

A ciò aggiungasi l'incremento che, nonostante tutto, si è verificato nel traffico ferroviario e marittimo, e si avrà un'idea più adeguata del modo come il commercio ha sopportato le conseguenze della crisi di rivalutazione e stabilizzazione della moneta.

Il reddito relativo, quindi, se è diminuito non può che esser diminuito leggermente in quanto il miglioramento verificatosi nell'attività commerciale ha potuto neutralizzare, almeno in parte, gli effetti della crisi e della discesa dei prezzi.

Per quanto riguarda i redditi del credito, non v'è dubbio che la crisi di rivalutazione e stabilizzazione della moneta ha avuto effetti contrari a quelli verificatisi nelle altre branche dell'economia, nel senso che, elevando fortemente il costo del denaro, ha neutralizzato gli effetti della restrizione del credito verificatasi conseguentemente alla crisi.

Secondo i nostri risultati, rispettivamente in 32 miliardi per il reddito industriale, e in 10 miliardi per il reddito di commercio e credito, mentre quest'ultima specie di redditi avrebbe presentato, rispetto alla cifra del Prof. Gini per il 1925, solo una diminuzione del 9-10 %, il reddito industriale, invece, avrebbe accusato una diminuzione dell'11-12 % circa.

Questa ultima diminuzione risulta inferiore di molto a quella risultante dai dati del Boldrini, il quale, giungendo, come già sopra abbiamo visto, a un risultato di 25 miliardi, la stabiliva nella misura del 31 %.

Considerando l'entità di tale diminuzione, v'è da osservare, anzitutto, che essa contrasta in modo evidente con quella che realmente

è la situazione economica industriale del 1928 rispetto a quella del 1925. Quasi nessuno degli indici dell'attività industriale può, infatti, giustificarla. In secondo luogo v'è da osservare che essa non avrebbe potuto verificarsi nel breve spazio di un biennio, senza essere accompagnata da tutti quei sintomi e da quelle speciali condizioni, non solo economiche ma anche sociali (disoccupazione ecc.), che sogliono accompagnare abbassamenti così intensi e repentini del reddito. Vero è che nel 1927 la crisi di rivalutazione della lira segna il punto massimo della sua intensità, ma è anche vero che l'organismo economico della Nazione, ne ha sopportato direi quasi agevolmente tutto l'enorme peso, iniziando anzi un'efficace reazione manifestatasi nel 1° semestre del 1928 con un lieve movimento di ripresa che era venuto sempre più consolidandosi nel 2° semestre, fino a dare l'impressione, nei primi mesi del 1929, di essere ormai rientrati nella normalità (1).

L'attività industriale, sebbene, come già abbiamo avuto occasione di rilevare, abbia risentito in modo accentuato, e più che non le altre forme di attività economiche, le influenze sfavorevoli della crisi, ha potuto, pur tra tutte le difficoltà, mantenere un certo grado di attività produttiva che è valso ad attenuare le conseguenze stesse. Valga a dimostrarlo lo specchietto seguente nel quale sono rappresentate le più importanti industrie e i principali prodotti.

Industrie e prodotti	1925 tonnellate	1928 tonnellate	Indice di variazione 1925 = 100
Industria mineraria :			
Minerali di solfo	1.774.275	1.933.143	109
Minerali di ferro	495.905	625.488	126
Minerali di piombo (anche argentifero) e di zinco	230.330	276.910	120
Piriti di ferro anche cuprifero . .	533.737	558.390	105
Combustibili fossili	1.296.696	835.842	64
Marmo bianco e colorato	577.640	583.223	101
Granito, sienite, porfido	298.093	379.148	127
Tufo vulcanico	2.300.000	2.421.000	105
Ghiaia e pietrisco	2.795.800	2.910.000	104

(1) L. MELIADÒ. *L'economia italiana nel 1929*, in « Indici del movimento economico italiano ». Anno IV, fasc. IV, dic. 1929.

Industrie e prodotti	1925 tonnellate	1928 tonnellate	Indice di variazione 1925 = 100
Industria metallurgica e siderurgica :			
Ghisa	481.799	507.482	105
Acciaio e ferro	1.891.695	2.097.021	111
Industria mineralurgica :			
Zolfo greggio e minerali di zolfo macinato	290.842	327.656	113
Coke metallurgico	512.264	641.399	125
Industria elettrica :	migl. di Kw.	migl. di Kw.	
Energia prodotta	6.544.500	8.936.364	137
	numero	numero	
Lampadine elettriche	11.369.629	19.325.702	170
Industrie tessili :	quintali	quintali	
Consumo di cotone	2.369.000	2.325.000	98
Consumo di lana greggia	690.577	921.738	133
Seta naturale	5.097	5.568	109
Industrie meccaniche :	tonnellate	tonnellate	
Consumo acciaio	1.901.975	1.778.898	94
Industria della gomma :	quintali	quintali	
Consumo gomma greggia	119.662	126.478	106
Industria dei cementi :	quintali	quintali	
Cemento	28.333.824	31.450.260	111
Industrie chimiche :			
Acido cloridrico	375.500	519.872	138
Acido solforico	8.000.000	7.041.000	88
Calciocianamide	377.500	552.710	146
Carburo di calco	551.700	866.818	157
Catrame minerale	614.100	758.010	123
Estratti tannici	618.350	771.612	125

Industrie e prodotti	1925 tonnellate	1928 tonnellate	Indice di variazione 1925 = 100
	metri cubi	metri cubi	
Gas illuminante	375.466.190	957.660.472	255
Idrogeno	1.100.000	1.363.200	124
Ossigeno	7.000.000	8.138.000	116
	metri	metri	
Pellicole cinematografiche	6.000.000	13.100.000	218
	quintali	quintali	
Perfosfati minerali e di ossa	15.288.000	15.511.000	101
Soda caustica solida	394.900	708.300	179
Soda caustica sciropposa	497.000	532.200	107
Solfato di rame	831.900	1.218.150	146
Zucchero	1.452.089	3.547.850	244
	ettolitri	ettolitri	
Spirito	592.178	756.793	219
	quintali	quintali	
Seta artificiale	138.500	259.986	187

Appare chiaro dunque che, quantitativamente, la produzione industriale nel 1928 non solo non è diminuita rispetto al 1925, ma è anzi aumentata.

Già, neppure per la produzione industriale del 1927 poteva dirsi di essersi verificata una contrazione (1). Eppure il 1927 è stato indubbiamente l'anno più critico per la nostra industria in seguito alla crisi di rivalutazione della lira.

Vero è che la diminuzione dei prezzi è stata molto forte dal 1925 al 1928 (23,97 %). Ma ad ogni modo essa non ha potuto contemporaneamente neutralizzare il beneficio della aumentata produzione e ridurre anche, con quell'intensità che il Boldrini le attribuisce, il reddito industriale.

Sarà, ora, sommamente interessante cercare di vedere se e quali variazioni ha subìto il reddito industriale dall'anteguerra al 1928. Per

(1) « Movimento economico dell'Italia». Raccolta di notizie statistiche per il 1927, a cura della Banca Commerciale Italiana, 1928.

rendere paragonabili le cifre dei due periodi occorrerà ridurre in lire prebelliche le cifre del periodo post-bellico, dividendole, cioè, per l'indice del livello dei prezzi delle merci all'ingrosso dell'anno a cui si riferiscono.

Si ha così che i 32 miliardi di reddito industriale, da noi trovati per il 1928, corrispondono a 6,5 miliardi, mentre i 36 calcolati dal Prof. Gini per il 1925 corrispondono a 5,6 miliardi. Se si pensa che nel 1914 il prof. Gini calcolava il reddito industriale a 6 miliardi, si noterà come nel 1925 si era verificata una diminuzione per 400 milioni, mentre nel 1928 si è avuto invece un aumento di 1/2 miliardo. Rispetto al 1925, l'aumento nella cifra del 1928 è di poco meno di un miliardo.

La differenza che si riscontra tra le cifre del Prof. Gini per il 1914 e per il 1925, apparirà ancora maggiore se si pensa che nella cifra del 1925 è incluso anche il reddito derivante dalle nuove provincie ; mentre per lo stesso fatto, apparirà più che giustificato l'aumento che si nota tra la nostra cifra del 1928 e la cifra del Prof. Gini per il 1914.

I 25 miliardi di reddito industriale, stabiliti dal Boldrini per il 1927-28, corrisponderebbero in lire pre-belliche a poco più di 5 miliardi, accusando così una diminuzione non trascurabile non solo rispetto ai 6 miliardi del 1914, ma anche rispetto ai 5,6 miliardi del 1925. Ciò comporterebbe implicitamente l'affermazione che l'industria italiana non solo non ha affatto progredito, ma ha anzi regredito al punto da essere ancora molto lungi dal raggiungere quel livello al quale si trovava prima della guerra.

Le differenze che, invece, si riscontrano tra la nostra cifra e quelle del Prof. Gini per il 1914 e per il 1925, non presentano contrasti stridenti o inammissibili. Può dirsi anzi che le variazioni riscontrate sono la logica conseguenza dei fenomeni economici verificatisi nei rispettivi spazi di tempo. Potrà forse sembrare troppo rapido un aumento di quasi un miliardo in lire prebelliche dal 1925 al 1928 ; ma non bisogna dimenticare che il Prof. Gini considera i 100 miliardi di reddito totale per il 1925 alquanto inferiori al vero.

La nostra industria, dunque, se non ha progredito, rispetto all'anteguerra, quanto forse potrebbe apparire a prima vista, non ha, però, neppure regredito. Reagendo validamente alle influenze sfavorevoli, essa mantiene solidamente le posizioni conquistate in attesa del momento buono per migliorarle.

Redditi d'immobili urbani.

Per quanto riguarda i redditi d'immobili urbani osserviamo che i 4 miliardi fissati dal Prof. Gini per il 1925 vanno indubbiamente elevati. Infatti, se da un lato è vero, in parte, che per effetto del regime vincolistico i prezzi degli affitti, nel triennio in considerazione, sono rimasti quasi stazionari, d'altro lato è anche vero che le costruzioni, dove più dove meno, sono andate sempre aumentando, accelerando anzi notevolmente il ritmo all'annuncio, da parte del Governo, della cessazione del regime che limitava gli affitti.

Per constatare l'aumento delle costruzioni dal 1925 al 1928 basta, infatti, osservare un certo indice dell'attività edilizia, elaborato dal Degli Espinosa, nel suo recente calcolo della ricchezza privata degli Italiani nel 1928 (1) in base al numero complessivo dei vani costruiti nei vari anni, nelle seguenti grandi città : Torino, Milano, Venezia, Genova, Firenze, Roma e Napoli. Facendo uguale a 100 il numero dei vani costruiti nelle stesse grandi città nel 1913, il Degli Espinosa ha ottenuto un indice di 247,2 per il 1925, di 272,5 per il 1926 e di 258,9 per il 1927. Manca l'indice per il 1928 che è quello che a noi più interessa. In una statistica, eseguita in base alle rilevazioni della Federazione Nazionale Fascista Costruttori Edili, e nella quale risulta il numero dei vani costruiti nelle principali città nei due anni 1927 e 1928, troviamo che il numero dei vani costruiti nel 1927 nelle stesse città considerate dal Degli Espinosa è di 62,535, mentre nel 1928 è aumentato a 107.390 con un incremento quindi del 71,72 %. Aumentando di tale percentuale il numero indice del 1927, calcolato dal Degli Espinosa a 258,9 si ha che il numero indice dell' attività edilizia, corrispondente al 1928, ammonta a 444,58 che, a sua volta, rappresenta di fronte a quello del 1925, fissato a 247,2 precisamente un aumento del 79,85%. Bisogna notare, inoltre, che l'annunzio della cessazione del regime vincolistico degli affitti fin dal primo semestre del 1928, non ha avuto soltanto l'effetto di incrementare considerevolmente le costruzioni, ma ha avuto anche l'effetto di sospendere le contrattazioni sulla base degli antichi prezzi, ciò che ha prodotto un innalzamento dell'indice del costo dell'abitazione, qual'è calcolato dall'Istituto Centrale di Statistica, con base giugno 1927 = 100. Tale indice è, infatti, passato da 87,68 nel gennaio del 1928 a 89,65 nel dicembre dello stesso anno.

---

(1) A Degli Espinosa. *La ricchezza privata, ecc.*, Op. cit.

Per tutte queste considerazioni, non potrà davvero sembrare eccessivo, se porteremo da 4 a 6 miliardi il reddito degli immobili urbani nel 1928.

Sei miliardi di reddito, di fronte a una ricchezza dei fabbricati urbani calcolata in 80 miliardi dal DEGLI ESPINOSA (1), per il 1928, non rappresentano che una percentuale del 7,50 % che, per chi conosca, anche solo superficialmente, il mercato edilizio, non può certamente dirsi elevata.

ALTRI REDDITI.

Per le due rimanenti categorie di reddito, cioè, per quella degli impieghi pubblici e privati e dei servizi domestici e per quella dei titoli, eccedenza dei redditi ricevuti dall'estero su quelli trasferiti all'estero, e per i redditi diversi, crediamo possa valere senz'altro l'aggiornamento fatto dal BOLDRINI, delle cifre del Prof. GINI per il 1925. Secondo tale aggiornamento il reddito delle due categorie ammonta rispettivamente a 10 miliardi per gli impieghi e servizi, e a 6 miliardi per i titoli e redditi diversi.

CONCLUSIONI.

Riepilogando i risultati ottenuti eseguendo il calcolo di ciascuna specie di reddito, si ha che il reddito complessivo degli Italiani nel 1928 risulta composto nel modo che segue:

	Miliardi
Redditi agricoli, forestali, della pastorizia, caccia, pesca ecc.	30
Redditi industriali	32
Commercio e credito	10
Impieghi pubblici e privati, servizi domestici . . .	10
Redditi d'immobili urbani	6
Titoli, eccedenza dei redditi ricevuti dall'estero su quelli trasferiti all'estero, redditi diversi . . .	6
Totale . . .	94

(1) A. DEGLI ESPINOSA. *La ricchezza privata*, ecc. Op. cit.

Gli Italiani, dunque, godevano nel 1928 di un reddito complessivo di 94 miliardi circa, cifra questa che, come cercheremo di dimostrare in seguito, non può davvero peccare di eccesso, anche se si allontana sensibilmente da quella più autorevole, in 78-80 miliardi, del BOLDRINI.

Ridotta in lire prebelliche, in base all'indice del prezzo delle merci all'ingrosso secondo l'elaborazione del Consiglio Provinciale dell'Economia di Milano, essa corrisponde a 19.131 milioni, mentre quella del BOLDRINI corrisponde appena a 15,9-16,3 miliardi.

Il Prof. GINI, per il periodo prebellico, e precisamente per il 1914, calcolava il reddito degli Italiani a 19-20 miliardi. La nostra cifra per il 1928 vi corrisponde, quindi, quasi esattamente, mentre quella del BOLDRINI, al confronto, accusa una diminuzione notevolissima, da 2,7 a 4,1 miliardi circa, diminuzione che apparirà ancora più elevata se si pensa che nei risultati del BOLDRINI è incluso anche il reddito delle nuove provincie.

Sicchè, stando alla cifra del BOLDRINI, il reddito pro-capite, rispetto all'anteguerra, non solo sarebbe diminuito in senso relativo per l'aumento della popolazione, compresa quella delle nuove provincie, ma sarebbe diminuito anche in senso assoluto.

Secondo le cifre del Prof. GINI, infatti, il reddito medio per testa degli Italiani, nel 1914, era di L. 526-554. Secondo il BOLDRINI, invece, nel 1928, sarebbe stato di L. 386-396, cioè di molto inferiore, e tale rimarrebbe, anche se supponessimo stazionaria, dal 1914 al 1928, la popolazione. In questo caso, infatti, esso ammonterebbe a 440-450 lire.

Ora, per molte ragioni, che in parte abbiamo esaminato eseguendo i vari calcoli per le varie specie di reddito, noi non crediamo che ciò possa essersi verificato.

In base ai nostri risultati, infatti, se non possiamo dire che all'anteguerra a oggi il reddito è aumentato, non possiamo, d'altra parte, neppure ammettere che esso sia diminuito oltre che in senso relativo, anche in senso assoluto.

Secondo la nostra cifra per il 1928, espressa però in lire prebelliche, il reddito medio per testa risulta di L. 467 ; cioè inferiore a quello dell'anteguerra, secondo le cifre del prof. GINI. Bisogna però osservare che in questo caso la differenza è dovuta, più che alla diminuzione assoluta del reddito, all'aumento della popolazione. Se, infatti, come abbiamo fatto per la cifra del BOLDRINI, supponessimo la popolazione stazionaria dal 1914 al 1928, otterremmo un reddito

pro capite presso a poco uguale a quello risultante dalle cifre del Prof. GINI per il 1914 (L. 530).

In lire post-belliche, il reddito medio per testa, di cui godevano gli Italiani nel 1914 secondo il Prof. GINI, sarebbe di L. 2.505-2.722, mentre quello di cui godevano nel 1928 sarebbe, secondo il BOLDRINI, di L. 1.896-1.946 e, secondo i nostri risultati di L. 2.295 circa.

Stando a questi confronti e alle osservazioni giustificate che da essi derivano, ci sembra che una cifra di 94 miliardi, quale reddito privato degli Italiani nel 1928, possa essere considerata molto vicina al vero. Cercheremo tuttavia, ancora, di controllarla in base ad altri procedimenti che possano servire a dimostrarne l'attendibilità.

Ed osserviamo: la ricchezza privata degli Italiani nel 1928, ammontava, secondo un recente calcolo del Dott. DEGLI ESPINOSA (1), a 475 miliardi al netto di ogni passività. Il reddito totale privato, da noi calcolato a 94 miliardi, sta, quindi, colla ricchezza, in un rapporto del 19,8 %. Il rapporto tra reddito e ricchezza è stato fissato dal Prof. GINI, per il periodo prebellico, tra il 17 e il 18 %, e risulta tra il 18 e il 19 % dai risultati dei calcoli eseguiti dallo stesso Prof. GINI per il 1925. Per il periodo attuale esso va indubbiamente elevato ancora, e noi pensiamo possa esser posto attendibilmente intorno al 20 %, così come risulta dalla nostra cifra per il 1928.

Crediamo, infine, opportuno procedere a un ultimo controllo della nostra cifra del reddito totale per il 1928, seguendo un procedimento indicato e spesso adoperato dal Prof. GINI per i suoi calcoli.

Tale procedimento si basa sul valore dei consumi alimentari della popolazione in un anno, da cui si risale al valore dei consumi complessivi, e quindi, mediante l'aggiunta del risparmio, al valore del reddito totale.

Nel 1922-23 il dott. MARIO BALESTRIERI (2) eseguì presso il Gabinetto di Statistica dell'Università di Padova, diretto dal Prof. CORRADO GINI, un'importante ricerca diretta a stabilire per i tre periodi, prebellico, bellico e post-bellico, l'entità, sotto vari aspetti, dei consumi alimentari della popolazione italiana. Egli giunse così ai seguenti risultati:

---

(1) A. DEGLI ESPINOSA. *La ricchezza privata*, ecc., op. cit.

(2) M. BALESTRIERI. *I consumi alimentari della popolazione italiana dal* 1910 *al* 1921. Biblioteca del « Metron », Padova, Istituto di Statistica, 1925.

Periodo	Disponibilità totali			Disponibilità medie per abitante		
	migl. di q.li	mil. di lire	migliaia di calorie	chilogrammi	lire	migliaia di calorie
1910-14	184.041	8.478,4	35.502,5	521,3	240,17	1.005,7
1915-18	179.626	16.352,7	36.171,3	490,4	451,91	987,6
1919-21	183.209	40.439,2	37.178,8	477,7	1.054,33	969,4
1921	192.726	49.927,4	38.729,1	496,7	1.286,79	998,2

Per il periodo 1919-21 il valore dei consumi alimentari ammontava, dunque, a 40.439 milioni, mentre per il solo anno 1921 era di quasi 50 miliardi. Ma quale sarà stato, allora, nel 1928, che è l'anno che interessa la nostra ricerca ?

Per ovvie ragioni, tendenti sopratutto ad eliminare possibili cause di accidentalità, crediamo opportuno, per i nostri calcoli, basarci sulla media del triennio 1919-21. E osserviamo che se supponessimo stazionario il consumo quantitativo e ci basassimo sulla diminuzione verificatasi nei prezzi all'ingrosso tra i due periodi in considerazione, dovremmo concludere che i 40.439 milioni di valore medio dei consumi nel triennio 1919-21, si sono, nel 1928, notevolmente ridotti. Ma evidentemente l'indice dei prezzi all'ingrosso ha nel nostro caso un valore molto relativo, nè potremmo, in modo adeguato, basarci sull'indice del costo della vita, che per il modo con cui è elaborato (media delle sole città di cui si possiedono i dati per tutti i mesi ; diversi criteri di rilevazione per ogni città ; spostamenti di base, ecc.) non può, in calcoli del genere, dare eccessivo affidamento.

Preferiamo perciò basarci sull'indice, più proprio, del costo dell'alimentazione, indice elaborato dal Consiglio Provinciale dell'Economia di Milano, con base 1° semetre 1914 = 100. Mancano, per altro, gli indici relativi agli anni anteriori al 1922, essendo la rilevazione cominciata solo in questo anno. È questo, del resto, un inconveniente a cui si può ovviare notando che negli anni anteriori al 1922 i prezzi, in genere, si sono mantenuti a un livello basso. E poichè nel 1922 l'indice del costo dell'alimentazione era 515,46 e, nel 1928, 517,01, se ne deduce che l'aumento del 0,30 % verificatosi in questi due indici, sarebbe maggiore se il termine « a quo » anzichè al 1922, si riferisse agli anni immediatamente precedenti, e cioè, nel nostro caso, al triennio 1919-21. Fin qui, dunque, abbiamo rilevato solo l'au-

mento dei prezzi supponendo stazionarie le quantità disponibili per il consumo.

In realtà, però, dal triennio 1919-21 al 1928 i consumi sono quantitativamente aumentati, non solo in senso relativo per l'aumento non trascurabile della popolazione, ma anche, noi crediamo, in senso assoluto, nel senso cioè che è aumentato il consumo medio per abitante.

Osservando il consumo di alcuni principali generi alimentari nel 1928, quali il frumento, il granturco, il vino, l'olio, ecc., si nota, infatti, rispetto al periodo 1919-21, un sensibile aumento. Inoltre, è di osservazione comune che il tenore di vita stesso della popolazione in genere, e delle classi basse in specie, è notevolmente migliorato in questi ultimi anni. Ciò risulterebbe da un certo aumento verificatosi nel consumo di generi voluttuari quali lo zucchero, il caffè, i tabacchi, ecc.

Del resto anche osservando le cifre del BALESTRIERI, si nota come tra la media del triennio 1919-1921 e il solo 1921, vi è, per quanto riguarda la quantità media per abitante dei beni consumati, una differenza non trascurabile. Tale quantità, infatti, da Kg. 477,7 nel periodo 1919-21 è passata a Kg. 496,7 nel 1921, manifestando così, fin da allora, la tendenza dei consumi ad aumentare.

Naturalmente sarebbe assurdo pensare che quell'intensità di aumento che si è verificata nel primo periodo dopo la guerra, si sia mantenuta anche in questi ultimi anni. Il decennio dal 1919 al 1928 è stato un periodo così denso di avvenimenti per la nostra vita economica, con ripercussioni, quindi, più o meno dirette, sulla capacità di consumo della popolazione, che sarebbe praticamente impossibile ammettere che una tale regolarità possa essersi verificata. Tuttavia non è certamente azzardato affermare che i consumi mentre in un primo tempo, forse fino a tutto il 1925-26, sono andati costantemente e sensibilmente aumentando, in un secondo tempo, invece, e cioè nel biennio 1927-28, essi sono venuti gradatamente contraendosi ; ma non certo con quella intensità cui erano venuti invece aumentando. Ciò del resto è naturale, e trova la sua spiegazione in una ragione di carattere psicologico, e cioè nel fatto che mentre l'allargamento dei consumi costituisce un piacere, una soddisfazione, la restrizione, invece, è un dolore, una pena, a cui malvolentieri l'individuo si sottopone, tanto più quanto più è durato il fenomeno piacevole a cui egli facilmente si era abituato. Ma, si potrà obiettare, il consumo, specie se alimentare, non può dipendere dalla volontà o meno dall'individuo. Esso dipende da qualche cosa di più concreto, da una realtà molto più obiettiva,

cioè, la quantità di reddito di cui si dispone. Evidentemente, ciò è vero. Ma, a nostra volta possiamo dire che l'individuo che vuole evitare il dolore, la pena che in lui provocherebbe la restrizione dei consumi, e mantenersi invece la soddisfazione di consumare largamente può, in regime di reddito stazionario o tendente alla contrazione, pagarsi questo piacere, questa soddisfazione a spese di quella parte del reddito che dovrebbe andare a incrementare il risparmio, cioè, la ricchezza. E ciò che si è verificato in questi ultimi anni, come vedremo in seguito, osservando la parte di reddito destinata ai consumi e quella destinata al risparmio.

Ad ogni modo, alla fine del 1928, la contrazione dei consumi che, secondo la nostra ipotesi, durava all'incirca da un biennio, non poteva aver neutralizzato che solo in parte l'aumento considerevole che si era verificato nel più lungo periodo precedente.

Per tutte queste considerazioni crediamo, dunque, di avvicinarci quanto più è possibile alla realtà, portanto i 40.439 milioni trovati dal Balestrieri pert il riennio 1919-21 a 46 miliardi per il 1928.

Il Prof. Gini, per il 1925, riteneva la spesa per i consumi alimentari superiore ai 50 miliardi, e probabilmente tra 53 e 55 miliardi. Rispetto a una cifra media di 54 miliardi per il 1925, la nostra cifra di 46 miliardi per il 1928, rappresenta una diminuzione del 14,82 % che corrisponde esattamente alla diminuzione verificatasi nello stesso periodo nell'indice dei prezzi delle derrate alimentari.

Agli effetti della determinazione della spesa complessiva, bisogna ora tener conto del fatto che il valore dei beni di consumo è calcolato ai prezzi di mercato, senza cioè comprendervi il costo di preparazione, le spese, cioè, che occorrono perchè le derrate siano portate allo stato necessario per esser pronte all'alimentazione.

Per tale costo di preparazione il Prof. Gini stabiliva nel 1921 una percentuale del 20 %, e nel 1925, considerando che esso era diminuito, specialmente per le classi medie, riteneva che potesse esser posto al 17 %. Per l'anno che interessa la nostra ricerca, cioè per il 1928, noi crediamo di poterlo stabilire nella misura del 16 % in considerazione del fatto che dal 1925 al 1928 sono sensibilmente diminuiti i prezzi di quelle materie che occorrono appunto alla preparazione degli alimenti e cioè gas, legna da ardere, carbone, conserve, grassi, droghe ecc.

In base a tale percentuale del costo di preparazione, la spesa totale per alimentazione salirebbe a 53.360 milioni.

Questa spesa, secondo il Prof. Gini, rappresentava, nel 1921, il 62-62,5 % della spesa complessiva. Questa ipotesi era sufficiente-

mente avvalorata da apposite inchieste eseguite dagli Uffici municipali del lavoro di Roma e Milano, in base alle quali la spesa totale per alimentazione, secondo la composizione del bilancio di una famiglia operaia tipica di cinque persone, rappresentava il 62,6 % sulla spesa complessiva a Roma, e il 62,1 % a Milano.

Per il 1925, il Prof. GINI, considerando che la spesa per alimentazione rappresenta una parte considerevole del bilancio familiare, riteneva che la percentuale relativa potesse essere posta tra il 60 e il 65 %.

Per il 1928 crediamo molto attendibile una percentuale del 60 %, oltre tutto anche in considerazione del fatto che in questi ultimi anni, noi riteniamo siano aumentate in proporzione le altre spese, quali quelle del vestiario, abitazione, luce, riscaldamento, trasporti, divertimenti ecc., e anche quelle, così dette, di lusso.

Questa nostra ipotesi, del resto, è avvalorata anche da uno studio eseguito dal Dott. A. MOLINARI (1) sulle ripercussioni della rivalutazione della moneta sui capitoli di spesa più importanti che compongono il così detto costo della vita. Da tale studio, infatti, risulta che nel gennaio 1928, rispetto al 1° semestre del 1926, mentre per gli altri capitoli di spesa la diminuzione è pressochè uniforme, nella parte alimentare la diminuzione è, invece, molto più accentuata. In altra parte del suo studio, poi, il MOLINARI afferma anche che la parte alimentare rappresenta appunto il 60 % del complesso bilancio familiare.

D'accordo, dunque, su questo punto, si ha che in base a tale percentuale il valore della spesa complessiva ammonta, nel 1928, a 88.934 milioni, cioè a poco meno di 89 miliardi in cifra tonda.

Per avere ora il reddito totale degli Italiani, bisogna aggiungere a questa cifra il risparmio. Bisognerebbe perciò prima calcolarne l'entità. È questo un calcolo che allo stato della rilevazione statistica è impossibile anche tentare e non potrà ovviarsi all'inconveniente che con una stima fatta in via congetturale e di larga approssimazione.

Nell'immediato periodo pre-bellico il risparmio dei privati si riteneva si aggirasse intorno ai due miliardi e mezzo di lire, cioè a più di 12,3 miliardi in lire post-belliche in base all'indice del livello dei prezzi nel 1928.

(1) A. MOLINARI. *La rivalutazione della lira, i prezzi al minuto e i salari*, Estr. dal « Giornale degli Economisti », aprile 1928.

Nel periodo post-bellico sembra sia notevolmente diminuito, tanto che il Prof. GINI, nel 1925, riferendosi alla situazione economica di quell'anno, lo riteneva tra i 7 e gli 8 miliardi, vale a dire tra 1.083 e 1.238 milioni in lire pre-belliche.

Per il 1928 manca qualsiasi punto di riferimento. Solo potremo osservare che se nel 1925, anno di prezzi alti, ha potuto esser posto tra i 7 e gli 8 miliardi, nel 1928 deve necessariamente esser posto a meno, in quanto vi è stato nell'intervallo di tempo tutto il processo di rivalutazione o stabilizzazione della moneta, con tutte le sue conseguenze. Crediamo quindi di non esser lontani dal vero ritenendo attendibile una cifra di 5 miliardi circa. Vero è che l'ammontare del risparmio è, per la sua stessa natura, variabilissimo, potendo in un anno essere elevato e in un altro basso, a seconda delle condizioni più o meno favorevoli in cui si è svolta l'attività economica, ma bisogna anche notare, nel nostro caso, che dal 1925 al 1928, il nostro paese ha attraversato un periodo non facile, e, ad ogni modo, certo poco adatto alla formazione di un risparmio di una certa entità.

Sicchè, aggiungendo agli 89 miliardi di spesa complessiva, cinque miliardi circa di risparmio, si ha che il reddito totale degli Italiani risulta nel 1928 di 94 miliardi.

Anche per questa via, dunque, giungiamo a risultati identici a quelli ottenuti seguendo il metodo così detto reale od oggettivo, col quale abbiamo cercato di accertare il valore dei prodotti e dei servizi resi. E ciò ci sembra possa costituire una nuova prova, se non della esattezza, certo della molta attendibilità che offre una cifra di 94 miliardi, quale reddito privato degli Italiani nel 1928.

Pubblicazioni ricevute. Publications reçues.
Publications received. Erhaltene Veröffentlichungen.

Periodici — Périodiques. Periodicals — Zeitschriften.

L'Agricoltura razionale. — Anno 1929 : febbraio ; Anno 1930 completo.
Alcuni indici della situazione economica italiana e del Lazio. — Anno 1930 : n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.
Le Assicurazioni sociali. — Anno 1930 : gennaio-febbraio ; marzo-aprile ; maggio-giugno ; luglio-agosto ; settembre-ottobre ; novembre-dicembre.
L'Assistenza sociale nell'industria. Anno 1930 : gennaio-febbraio ; marzo-aprile ; maggio-giugno ; luglio-agosto ; settembre-ottobre ; novembre-dicembre.
Atti della R. Accademia dei Georgofili : Anno 1930 : Dispensa 1ª, 2ª-3ª, 4ª.
Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. — Anno 1929-30, Tomo LXXXIX, Dispensa 5ª, 6ª, 7ª, 8ª. Anno 1930-31 : Tomo XC, Disp. 1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª, 6ª, 7ª, 8ª.

Bollettino del Consiglio Provinciale dell'Economia di Brescia. — Anno 1930 : n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.
Bollettino del Consiglio Provinciale dell'Economia di Trieste. — Anno 1930 : n. 4, 12.
Bollettino del Consiglio Provinciale dell'Economia di Udine. — Anno 1930 : n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.
Bollettino della Federazione Nazionale Fascista delle Imprese Assicuratrici. Anno 1930 : n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24. Indice.
Bollettino dell'Istituto Statistico Economico. — Trieste. — Anno 1930 : gennaio-febbraio-marzo ; aprile-maggio-giugno ; luglio-agosto-settembre ; ottobre-novembre-dicembre.
Bollettino del Lavoro e della Previdenza Sociale. — Anno 1929 : ottobre-novembre-dicembre. Anno 1930 : gennaio-febbraio-marzo ; aprile-maggio-giugno ; luglio-agosto.
Bollettino delle Malattie Infettive del Regno (*Ministero dell'Interno*). — Anno 1930, dal n. 1 al n. 52.
Bollettino Mensile della Società delle Nazioni. — Anno 1930 : n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Bollettino di Notizie Economiche. — Anno 1930: n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.
Bollettino Sanitario del Bestiame - Bimensile (*Ministero dell'Interno*). — Anno 1930: completo.
Bollettino di Statistica Agraria e Commerciale (*Istituto Internazionale d'Agricoltura*). — Anno 1930: completo.
Bollettino Statistico Mensile del Comune di Firenze. — Anno 1930: completo.
Bollettino di Statistica Agraria e Forestale (*Istituto Centrale di Statistica del Regno*). — Anno 1930; completo.
Bollettino Statistico Mensile per la Provincia di Milano. — Anno 1930: giugno, luglio, agosto, settembre, ottobre, novembre, dicembre.
Bollettino Statistico del Ministero dei Lavori Pubblici. — Anno 1930: completo.

Il Calore. — Anno 1930: n. 5.
Casa e lavoro. — Anno 1930: n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
Commercio (*Confederazione Nazionale Fascista dei Commercianti*). — Anno 1930: completo.
Il Comune di Bologna. — Anno 1930: gennaio, febbraio, marzo.
Consiglio Provinciale dell'Economia di Milano. — Indici settimanali di borsa. Anno 1930: completo. — Indici settimanali dei prezzi all'ingrosso. Anno 1930: completo. — Listino dei prezzi. Anno 1930: completo.
Dati Mensili relativi all'esercizio delle Ferrovie dello Stato (*Ministero delle Comunicazioni*). — Anno 1930: completo.
Il Diritto Aeronautico. — Anno 1930: completo.

Echi e Commenti. — Anno 1930: dal n. 1 al n. 33.
Economia. — Anno 1930: completo.
L'Economia Nazionale. — Anno 1930: completo.
L'Esportatore Italiano. — Anno 1930: gennaio, marzo, aprile, maggio, giugno, luglio, agosto, settembre, ottobre, novembre, dicembre.
Finanza locale. — Anno 1930: completo.
Fisiologia e Medicina. — Anno 1930: fasc. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Il Giornale Economico. — Anno 1930.
Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica. — Anno 1930: completo.
Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari. — Anno 1930: n. 1, 2.
Giornale di Matematica Finanziaria. — Anno 1930: n. 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Giornale di Medicina Militare. — Anno 1930: novembre-dicembre.

Indici del Movimento Economico Italiano. — Anno 1930: n. 1, 2, 3, 4.
L'Industria Italiana delle Conserve Alimentari. — Anno 1930: completo.
L'Italia che scrive. — Anno 1930: completo.

Il Lattante. — Anno 1930: completo.
Il Lavoro industriale. — Anno 1930: n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Listino dei prezzi del Consiglio Provinciale dell'Economia di Milano. — Anno 1930: completo.

La Marina Italiana. — Anno 1930 : completo.
Mutualità Assicurativa. — Anno 1930 : completo.

Notiziario Economico dell'Argentina. — Anno 1930 : completo.
Notiziario Economico Commerciale del Brasile. — Anno 1930 : n. 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80-81, 82, 84.
Notiziario Economico della Cirenaica Italiana. — Anno 1930 : gennaio, febbraio, marzo-aprile, maggio-giugno.
Nuovi studi di Diritto, Economia e Potitica. — Anno 1930 : completo.
L'Organizzazione industriale. — Anno 1930 : completo.
L'Organizzazione scientifica del lavoro. — Anno 1930 : completo.

Prezzo corrente delle merci sulla piazza di Livorno. — Anno 1930 : completo.

Rassegna Commercialista. — Anno 1930 : n. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.
Rassegna Economica dell'Abruzzo Teramano. — Anno 1930 : completo.
Rassegna di Ostetricia e Ginecologia. — Anno 1930 : gennaio, febbraio, aprile, giugno.
Rassegna della Previdenza Sociale. — Anno 1930 : completo.
Rassegna quindicinale dell'Agricoltura (*Banca Nazionale dell'Agricoltura*). — Anno 1930 : completo.
Rassegna di studi sessuali e di eugenica. — Anno 1930 : completo.
Rassegna dell'U. S. I. L. A. — Anno 1930 : completo.
Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. — Anno 1930 : Vol. LXIII, Fasc. 2-5 ; 6-10 ; 11-15 ; 16-18 ; 19-20.
La Riforma Sociale. — Anno 1930 : completo.
Rivista delle Assicurazioni. — Anno 1930 : completo.
Rivista Bancaria. — Anno 1930 : n. 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.
Rivista di Diritto Agrario. — Anno 1930 : completo.
Rivista di Diritto Commerciale. — Anno 1930 : completo.
Rivista di Diritto del Lavoro. — Anno 1930 : marzo-aprile ; luglio-agosto ; settembre-ottobre ; novembre-dicembre.
Rivista di Diritto Penitenziario. — Anno 1930 : n. 2, 3, 4, 5, 6, 7.
Rivista di Economia Finanziaria. — Anno 1930 : n. 3, 4, 5.
Rivista Internazionale del cinema educatore. — Anno 1930 : gennaio, marzo, aprile, maggio, giugno, luglio, agosto, settembre, ottobre, dicembre.
Rivista Internazionale di Scienze Sociali e Discipline Ausiliarie. — Anno 1930 : maggio, luglio.
Rivista Mensile (*Banca Italiana Commerciale*). — Anno 1930 : completo.
Rivista mensile della città di Trieste. — Anno 1930 : completo.
Rivista mensile della città di Venezia. — Anno 1930 : completo.
Rivista di Politica Economica. — Anno 1930 : completo.

Scientia. — Anno 1930 : completo.
Statistica del commercio speciale di importazione ed esportazione (*Ministero delle Finanze*). — Anno 1930 : completo.
Lo Stato. — Anno 1930 : n. 1, 2, 4.
Studi Senesi. — Anno 1930 : n. 1, 2-3.

Il Traguardo. — Anno 1930 : n. 6, 7, 8, 9.
Universalità Fascista. — Anno 1930 : n. 9, 12.
La Vita Italiana. — Anno 1930 : completo.

Bibliographie d'Hygiène Industrielle (*Bureau International du Travail*). — Année 1930 : n° 1, 2, 3, 4.
Bulletin de Banque Nationale de Tchécoslovaquie. — Année 1930 : complète.
Bulletin Economique de l'Institut Central des Sociétés Financières (Budapest). — Année 1930 : n° 2, 3, 4.
Bulletin d'Information (*Organe de la Société pour les relations culturelles entre l'U. R. S. S. et l'Etranger*). — Année 1930 : n° 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.
Bulletin Mensuel de l'Institut International de Coopération Intellectuelle. — Année 1930 : complète.
Bulletin Mensuel de l'Office permanent de l'Institut International de Statistique. — Année 1930 : complète.
Bulletin Mensuel de Statistique de la Société des Nations. — Année 1930 : complète.
Bulletin Officiel (*Bureau International du Travail*). — Année 1930 : n° 1, 2, 3, 4.
Bulletin de la Statistique Générale de la France. — Année 1930 : complète.
Chronique mensuelle des migrations (*Bureau International du Travail*). — Année 1930 : n° 1, 2, 3, 4.
L'Epargne du monde. — Année 1930 : complète.
Hygiène du travail (*Bureau International du Travail*). — Année 1930 : n° 218 à 250 et Sommaire.
Informations Sociales (*Bureau International du Travail*). — Année 1930 : Vol. XXXIII ; XXXIV ; XXXV ; XXXVI, complets.

Journal de la Société Hongroise de Statistique. — Année 1930 : n° 1, 2, 3, 4.
Journal de la Société de Statistique de Paris — Année 1930 : complète.

Matériaux pour l'Etude des Calamités. — Année 1930 - n° 21, 22, 23, 24.

Le Moniteur Officiel du commerce et de l'industrie. — Année 1930 : complète.
Le Mouvement syndical international. — Année 1930 : complète.
Le Musée Social. — Année 1930 : n° 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Rapport épidémiologique mensuel de la section d'Hygiène du secrétariat de la Société des Nations. — Année 1930 : complète.
Recueil mensuel de l'Institut international du Commerce. — Année 1930 : Tome XIX, n° 5.
Relevé hebdomadaire épidémiologique de la Société des Nations. — Année 1930 : n° de 196 à 252.
Revue Anthropologique. — Année 1930 : octobre-novembre-décembre.
Revue des études coopératives. — Année 1930 : janvier-mars, n° 34.
Revue internationale des sciences administratives. — Année 1930 : complète.
Revue de l'Institut de sociologie (Solvay). — Année 1930 : n° 1, 2, 4.

Revue internationale du travail. — Année 1930 : complète.
Revue du travail. — Année 1930 : mars, avril, mai, juin, juillet.

Série législative (*Bureau International du Travail*). — Année 1930 : janvier, mars, avril, mai, juin, juillet, septembre, octobre, novembre, décembre.
Société de banque suisse. — Année 1930 : nº 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12.

The American economic review. — Year 1930 ; march, june, september, december.
American journal of physical antrhopology. — Year 1930 : january-february-march.
The American political science review. — Year 1928 : november.
The Annals of mathematical statistics. — Year 1930.

Bank of Finland. — Year 1930 : completed.
Bulletin of Business research. — Year 1930 : juni, july, august, september, october, november, december.
Bulletin of the Pan-American Union. — Year 1930 : complete.
Bulletin of the wool manufacturers. — Year 1930 : complete.
The Burroughs clearing house. — Year 1930 : january, february, march, april, june, july, august, october, november.
Crops and Markets. — Year 1930 : complete.
Ecology. — Year 1930 : nr. 1, 2, 3, 4.
Economica. — Year 1930 : nr. 28, 29, 30.
Economic History (*Supplement of the Economic Journal*). — Year 1930 : nr. 5, Vol. II.
Economic Journal. — Year 1930 : march, nr. 157 ; juni, nr. 158.
Eugenics Review. — Year 1930 : juanuary, april, july, october.
Foreign Crops and markets. — Year 1930 : nr. 1, 2, 3, 4.
Guaranty Trust Company. — Year 1930 : march, september, december.
Harvard Economic Service (*Weekly letters*). — Year 1930 : complete, and summary.
Human Biology. — Year 1929 : january, may, september, december. Year 1930 : february.
Illinois Health Messenger. — Year 1930 : complete.
Illinois Health News. — Year 1930 ; complete.
Indian Journal of Economics. — Year 1930 : april, nr. 4 ; july, nr. 1.
The Industrial Bulletin. — Year 1930 : complete.
Industrial Hygiene Bulletin. — Year 1930 : complete.
International Cotton Bulletin. — Year 1930 : complete.
Journal of the American Statistical Association. — Year 1930 : march, june, september.
Journal of Educational Research. — Year 1930 : complete.
The Journal of Political Economy. — Year 1930 : february, june, august, october, december.
Journal of the Royal Statistical Society. — Year 1930 : complete.

Kinki Monthly. — Year 1930 : september, october, november.

Labour Gazette. — Year 1930 : complete.

Michigan Public Health. — Year 1930 : complete.
Monthly Labour Review. — Year 1930 ; complete.
Monthly Vital Statistics. — Year 1930 : nr. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12.

Official Year Book of the New South Wales. — Year 1929-30 : Part. I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII.
The Political Quarterly. — Year 1930 : nr. 1.
Political Science Quarterly. — Year 1930 : march, june.
Prices and Prices-Index (*Department of Trade and Commerce Dominion Bureau of Statistics — Ottawa*). — Year 1930 : complete.
Quarterly Statistical Bulletin of the New South Wales. — Year 1930 : march.
The Quarterly Journal of Economics. — Year 1930 : february, may, november.
The Review of Economic Statistics. — Year 1930 : complete.
Social Science Abstracts. — Year 1930 : complete.
Special Bulletin State of New York. — Year 1930 : nr. 164, 165, 166, 167.
Statistical Bulletin Metropolitan Life Insurance Company. — Year 1930 : nr. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
The Statistical Monthly (Cina). — Year 1930 : complete.
Statistical Register of the New South Wales. — Year 1929-30 : Part I, II, III.
Transactions actuarial Society of America. — Vol. XXXI, Part One nr. 83 ; Part. two nr. 84.
Vital Statistics Bulletin. — Year 1930 : complete.

Allgemeines Statistisches Archiv. — Jahrgang 1930 : Band XX°, nr. 1, 2, 3, 4.
Archiv für soziale Hygiene und Demographie. — Jahrgang 1930 : Heft 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Archiv für Rassen und Gesellschafts-Biologie. — Jahrgang 1930 : Heft II, III, IV, XXIII.
Berliner Wirtschaftsberichte. — Jahrgang 1930 : Heft 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Deutsches Statistisches Zentralblatt. — Jahrgang 1930 : wollständing.
Kölner Vierteljahrshefte für Soziologie. — Jahrgang 1930 : Heft 1-2.
Monatliche Nachweise über den auswartigen Handel Deutschlands. — Jahrgang 1930 : wollständing.
Monatsbericht des Statistischen Amts der Stadt Berlin. — Jahrgang 1930 : wollständing.
Statistische Nachrichten. — Jahrgang 1930 : Heft 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.
Weltwirtschaftliches Archiv. — Jahrgang 1930 : Heft 1, 2, 1, 2.
Wirtschaft und Statistik. — Jahrgang 1930 : wollständing.
Zeitschrift für Schweizerische Statistik. — Jahrgang 1930 : Heft 1, 2, 3, 4.
Banque Nationale du Royaume de Yougoslavie. — Année 1930 : nr. 1, 2, 3, 4.
Boletim Hebdomadario de Estadistica Demographo-Sanitaria de Rio de Janeiro. — Anno 1930 : n° 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 51, 52.

Boletin do Instituto de Cafè de Estado de São Paulo. — Anno 1930 : completo.
Boletín Demográfico de España. — Anno 1929 : aprile-maggio-giugno.
Boletín de la Dirección General de Estadística del Perú. — Anno 1930 : nº 3, 4, 5.
Boletin Mensal de Estadística Demographo-Sanitaria da Cidade de Rio de Janeiro. — Anno 1930 : completo.
Boletín Mensal de Estadística Agro-Pecuaria (*Ministerio de Agricultura de la Nación Argentina*). — Anno 1930 : completo.
Boletín de la Oficina Sanitaria Panamericana. — Anno 1930 : n. 4, 5, 6.
Bulletin de la Banque nationale de Roumanie. — Année 1930 : complète.
Bulletin Mensuel de Statistique du Royaume de Bulgarie. — Année 1930 : complète.
Bulletinul Statistic al Romäniei. — Année 1930 : nº 1, 2, 3, 4.
Cenovè Zprávy (*Rapports sur les prix publiés par l'Office de Statistique de la République Tchécoslovaque*).
Ceskoslovensky Statisticky Véstnik. — Année 1930 : nº 3-4, 5-6, 7-8, 9-10.
Commerce extérieur de la République Polonaise. — Année 1930 : complète.
El Comercio Extérior Argentino. — Anno 1929 : nº 206.
Economia I Finances. — Anno 1930 : nº 18.
Ekonomisk Oversikt (*Stockholm*). — Anno 1930 : completo.
El Trabajo (*Cordova*). — Anno 1930 : nº 1, 2.
Estatistica Demographo-Sanitaria (*Bello Horizonte*). — Anno 1928 : 2º e 3º trimestre ; Anno 1929 : 1º trimestre.
Kommersiella Meddelanden (*Stockholm*). — Anno 1930 : completo.
Lwów w Cyfrach (*Léopol en chiffres*). — Anno 1930 : completo.
Maandschrift van Het Centraal Bureau voor de Statistiek (*S. Gravenhage*) : Année 1930, complète.
Manedsopgaver over Vareomsetningenmed Utlandet. — Année 1930 : complète.
La medicina Argentina. — Anno 1930 : nº 92.
Mesicni Prehled Zahranicniho Obchodn, Republiky Ceskoslovenske. — Année 1930 : complète.
Rapports de l'Office de Statistique de la République Tchécoslovaque. — Année 1930 : de nº 1 à nº 111.
Revista de Ciencias Económicas. — Anno 1930 : gennaio, febbraio, ottobre, novembre, dicembre.
Revista Economica. — Anno 1930 : completo.
Revista de Economia Argentina. — Anno 1930 : completo.
Revista de Hygiene e Saude Publica (*Rio de Janeiro*). — Anno 1929 : nº 4, Anno 1928 : nº 11.
Revue trimestrielle de la Direction Générale de la Statistique de la Bulgarie. — Année 1930 : complète.
Revue trimestrielle de Statistique de la République Polonaise. — Année 1930 : complète.
Schola et Vita (*Instituto Pro Interlingua*). — Anno 1928 : settembre, ottobre ; Anno 1930 : novembre, dicembre.
Secretaría de Hacienda y crédito público (*Mexico*). — Anno 1930 : nº 7.
Statistique des Prix (*Varsovie*). — Année 1930 : complète.

Statistique du Travail. — Année 1930 : complète.
Statistische Meddelelser (*Oslo*). — Année 1930 : complète.
Tilastokatsauksia (*Helsingfors*). — Année 1930 : complète.
I A Ulkomaankauppa (*Helsinki*). — Année 1930 : complète.
Wiadomosci Statystyczne (*Miasta Poznania*). — Anno 1930 : completo.
Wiadomosci Statystyczne (*Informations statistiques de l'Office central de Statistique de la Pologne*). — Année 1930 : complète.

Libri, Annuari, Opuscoli, Estratti, etc.

Livres, Annuaires, Brochures, Extraits, etc.

Books, Yearbooks, Pamphlets, Reprints, etc.

Bücher, Jahrbücher, Broschüren, Separatabdrücke, usw.

ALBERTARIO P. — *Contributo alla conoscenza delle condizioni economiche della produzione agraria in Lombardia nell'immediato anteguerra* (1910-14) *e nel passato più recente* (1924-29). Pavia, 1930.

ID. — *Il disegno di legge sui miglioramenti fondiari nella locazione dei fondi rustici.* Milano, 1930.

ALBERTI MARIO. — *Gli svolgimenti monetari in Italia.* Roma, 1927.

ID. — *Illusioni e realtà monetarie.* Milano, 1929.

ALMAGIÀ ROBERTO. — *Saggio di carta antropogeografica dell'Alta Val Venosta.* Roma, 1930.

AMANTIA AGATINO. — *Indagini sulla vita economica.* Catania, 1928.

ANNALI DI ECONOMIA. — Vol. VI, N. 2, 1930.

ANNALI DI STATISTICA. — Serie VI, Vol. VI, VII, IX, XI. Istituto Centrale di Statistica del Regno, Roma, 1930.

ANNALI DELL'UNIVERSITÀ DI CAMERINO. — Vol. II, III, IV, 1930.

ANNUARIO DELL'AUTOMOBILISMO. — 1931.

ANNUARIO ITALIANO DELLE IMPRESE ASSICURATRICI. — Anno 1930.

ANNUARIO DEL R. ISTITUTO SUPERIORE DI SCIENZE ECONOMICHE E COMMERCIALI DI VENEZIA PER L'ANNO ACCADEMICO 1929-30.

ARCARI PAOLA MARIA. — Le lingue nazionali della Confederazione Elvetica e i loro spostamenti attraverso il tempo, Roma, 1930.

ARCHIVIO ITALIANO DI PSICOLOGIA. — Vol. VIII, Fasc. III. Fascicolo dedicato alla psicotecnica. 1930.

ARCHIVIO DI STUDI CORPORATIVI. — Vol. I, Fasc. II, 1930.

ARMANI FRANCO. — *Il mercato dell'industria areonautica nel* 1929. Roma, 1927.

ARTOM CESARE. — *L'origine e l'evoluzione della partogenesi attraverso i differenti biotipi di una specie collettiva* (*Artemia salina* L.) *con speciale riferimento al biotipo diploide partogenetico di Sète.* Roma, 1931.

ASCOLI VITTORIO. — *Il 3° Corso della Scuola Superiore di Malariologia.* Roma, 1930.

ID. — *Il 4° Anno della Scuola Superiore di Malariologia,* Roma, 1931.

ASSOCIAZIONE NAZIONALE FASCISTA DEI CONCESSIONARI TELEFONICI. — *La organizzazione industriale del Servizio telefonico in regime fascista.* Roma, 1930.

ASSOCIAZIONE FRA LE SOCIETÀ ITALIANE PER AZIONI. — *Notizie Statistiche* Ediz. XII, 1930.

ATTI DEL IX CONGRESSO GEOGRAFICO ITALIANO. Genova, 1924, Vol. 3°.

ATTI DEL CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI. — Bologna, 3-10 settembre 1928. Tomo II e III.

ATTI DEL 1° CONGRESSO PIEMONTESE DI ECONOMIA MONTANA. — Torino, 1930.

ATTI DELL'ISTITUTO NAZIONALE DELLE ASSICURAZIONI. Roma, 1930.

ATTI UFFICIALI. — *Prima adunata degli industriali dei liquori.* Milano, 1930.

BACHI RICCARDO. — *Gli scambi commerciali dell'Italia con l'estero nel* 1929: *Le variazioni di quantità e di prezzo e la dinamica dei prezzi.* Roma, 1930.

BAGLIO GAETANO. — *La scuola primaria nell'economia sociale.* Caltanissetta, 1913.

ID. — *Lavoro, scuola e Wilsonismo.* Bari, 1919.

ID. — *Monografia di famiglia del contadino giornaliero in Sicilia nell'anno colonico* 1904-1905. Roma, 1912.

ID. — *Napoleone Colajanni.* Roma, 1915.

ID. — *Sicilia, Piemonte e Lombardia nella Statistica Giudiziaria Penale.* Napoli, 1910.

BALESTRA DUILIO. — *Rapporto preventivo circa una completa inchiesta antropometrica che i ministeri delle forze armate d'Italia dovranno eseguire su tutti i militari di una intera classe di leva.* Roma, 1930. « Giornale di Medicina Militare », Fasc. XI, 1930.

BALP STEFANO. — *Andamento della difterite in provincia di Bergamo.*

ID. — *Condizioni igieniche della provincia di Torino.* Parte II, III. Torino, 1900.

ID. — *Dati Statistici ed eziologici sull'endemia gozzo-cretinica nella provincia di Torino.* Torino, 1904.

ID. — *De prole augenda.* Milano, 1929.

ID. — *Il tifo nella provincia di Bergamo,* Torino, 1906.

ID. — *La diffusione del gozzo in Finlandia.* Milano, 1928.

ID. — *La missione igienica e sociale delle scuole di Bergamo.* Ciriè, 1926.

ID. — *La pellagra nei riguardi demografici, sanitari, etc.* Torino, 1907.

ID. — *La tubercolosi in Provincia di Novara.* Novara, 1922.

ID. — *L'endemia tiroidea in Italia.* Ciriè, 1913.

ID. — *Le scuole di igiene e di educazione domestica nella lotta contro la pellagra.* Biella, 1913.

ID. — *L'eziologia del gozzo nelle osservazioni e nelle opinioni degli ufficiali sanitari.* Milano, 1927.

ID. — *Natalità, neomalthusianismo, eugenismo.* Milano, 1928.

ID. — *Sull'interpretazione dei quozienti di mortalità.* Torino, 1906.

ID. — *Venti anni di applicazione della legge sanitaria.* Bologna, 1911.

ID. — *Venticinque anni di lotta contro la pellagra* (1881-1906) Biella, 1908.

BANCA COMMERCIALE ITALIANA. — *Movimento Economico dell'Italia per l'anno* 1929. Milano, 1930.

ID. — *Movimento Economico dell'Italia per l'anno* 1930. Milano, 1931.

BANCA NAZIONALE DELL'AGRICOLTURA. — *Relazione e bilancio,* 1928.

ID. — *Relazione e bilancio al* 31 *dicembre* 1929.

BANCA NAZIONALE DEL LAVORO. — *Bilancio* 1929.

ID. — *Bilancio* 1930.

BANCO DI SICILIA. — *Rendiconti e conti consuntivi dell'esercizio* 1930.
BARRUCCHELLO MARIO. — *Cosimo il Grande*. Livorno, 1931.
ID. — *Inquadramento Sindacale*. « L'Unione Industriale » Febbraio, 1930.
ID. — *Per l'unificazione della legislazione italiana del lavoro. Livorno*, 1931.
ID. — *Statistiche Industriali*. « L'Unione Industriale » Maggio-giugno 1930.
BATTAGLINI GIULIO. — *Tradizione e riforme nel nuovo Codice Penale*. 1931.
BENEDETTI PIERO. — *Cancro e costituzione*. Bologna, Cappelli, 1931.
BECKER C. H. — *Storiografia nazionale e Cooperazione intellettuale*. Roma, 1930.
BENINI RODOLFO. — *Ancora sul coefficiente per il calcolo della ricchezza privata*. Estr. « Bollettino di Statistica e Legislazione comparata » Fasc. I, Vol. XI. Anno XI.
ID. — *Commemorazione di Bonaldo Stringher*. Accademia dei Lincei. Roma, 1931.
BENOY KUMAR SARKAR. — *Società ed economia nell'India antica e moderna*. « Annali di Economia », Vol. VI, N. 2, 1930.
BOLDRINI MARCELLO. — *La fertilità dei biotipi*. Milano, 1931.
BOMPIANI ROBERTO. — *Eugenica e Stirpe*. Roma, 1931.
BORSI UMBERTO. — *La determinazione degli Enti Autarchici territoriali nell'odierno diritto italiano*. Padova, 1930.
BRAMBILLA E. — *La questione vinicola*. Poggibonsi, 1928.
BRAY EDMONDO. — *Grandezze ponderali di alcuni visceri umani in rapporto alle dimensioni esterne dei corrispondenti segmenti corporei*. Firenze, 1931.
BRUSA PIETRO. — *L'allattamento e il riconoscimento del figlio illegittimo da parte della madre. Problema di interesse amministrativo-provinciale*. « Rivista delle Provincie ».
CAMBONI LUIGI. — *Lezioni di statistica*. Anno accademico 1930-31. Roma, Sampaolesi.
CAMERA DI COMMERCIO ED INDUSTRIA DI CAGLIARI. — *Sul regime economico-doganale del dopo guerra*. Cagliari, 1916.
CANTELLI F. P. — *Estensioni del teorema di reciprocità di Fourier*. Bologna, 1929.
CARANO DONVITO GIOVANNI. — *Economia ed economisti di Puglia*. Torino, 1930.
CATTEDRA AMBULANTE DI AGRICOLTURA DI PADOVA. — Annuario 1929.
CENTENARIO DEL NITRATO DI SODA DEL CHILE. — 1830-1930.
CESARI ETTORE. — *La distribuzione d'energia come fatto economico*. Milano, 1931.
ID. — *La produzione e l'impiego dell'energia in Italia nell'annata* 1928. « Energia Elettrica » Fasc. VII, Vol. VI, Agosto 1929.
CIANCI ERNESTO. — *Andamento delle operazioni di credito agrario in Italia dal* 1871 *al* 1929. « Giurisprudenza e Legislazione Bancaria ». N. 3, 4, 7, 1930.
CIASCA RAFFAELE. — *Il problema della terra*. Milano, 1921.
CICCOTTI ETTORE. — *Il problema politico nel mondo antico*. « Nuova Rivista Storica » anno XV, N. I-II, 1931.
ID. — *Motivi demografici e biologici nella rovina della civiltà antica*. « Nuova Rivista Storica » anno XIV, fasc. I-II, 1930.
CIONE EDMONDO. — *L'industria farmaceutica nell'ordinamento corporativo*. Napoli, 1930.
CONFEDERAZIONE GENERALE ENTI AUTARCHICI. — *Annuario Statistico delle città Italiane*. Anno VII.

CONFEDERAZIONE GENERALE FASCISTA DELL'INDUSTRIA ITALIANA. — *I risultati finanziari e il costo delle assicurazioni sociali in Italia.* 1931.

ID. — *L'industria italiana.* Roma, 1929.

ID. — *Piccolo Annuario statistico italiano.* 1930.

XI CONGRESSO GEOGRAFICO ITALIANO. — *Programma.* Napoli, 1930.

II CONGRESSO NAZIONALE DI STUDI ROMANI. Roma, 1930.

XXIX CONGRESSO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI OSTETRICIA E GINECOLOGIA. Dicembre 1930.

CONSIGLIO PROVINCIALE DELL'ECONOMIA DI BRESCIA. — *Relazione statistica sull'attività economica della Provincia.* Brescia, 1931.

CONSIGLIO PROVINCIALE DELL'ECONOMIA DI CHIETI. — *Relazione statistica sull'andamento economico della Provincia di Chieti durante l'anno* 1928. *con particolare riferimento ai dati del* 1927.

CONSIGLIO PROVINCIALE DELL'ECONOMIA DI GENOVA. — *Relazione sull'andamento economico della Provincia di Genova nell'anno* 1929.

CONSIGLIO PROVINCIALE DELL'ECONOMIA DI LIVORNO. — *L'economia della provincia di Livorno nell'anno* 1929.

CONSIGLIO PROVINCIALE DELL'ECONOMIA DI MILANO. — *Indice bibliografico* 1930.

CONSIGLIO PROVINCIALE DELL'ECONOMIA DI SASSARI. — *Economia e popolazione della Sardegna settentrionale.* Sassari, 1931.

CONSIGLIO PROVINCIALE DELL'ECONOMIA DI TRIESTE. — *Statistica del Commercio e della Navigazione di Trieste per l'anno* 1930.

ID. — *Relazione sull'andamento economico della Provincia di Trieste nel* 1929.

CONSIGLIO PROVINCIALE DELL'ECONOMIA DI VENEZIA. — *L'attività economica della provincia di Venezia.* Venezia, 1931.

CONSIGLIO PROVINCIALE DELL'ECONOMIA DI VICENZA. — *L'attività economica in provincia di Vicenza nel* 1929.

CONSORZIO PER L'INDUSTRIA SOLFIFERA SICILIANA. — *Conto consuntivo per l'esercizio* 1929-30. Palermo, 1931.

ID. — *Otto anni di gestione commissariale.* 1922-1930.

CRESTANI GIUSEPPE. — *Climatologia.* « Trattato Italiano d'Igiene ». Torino, 1931.

D'ALBERGO ERNESTO. — *Aspetti e tendenze della nuova politica economica dell'Italia.* Catania, 1929.

D'ALFONSO N. R. — *Ostia e il Tevere.* Roma, 1930.

D'ALVISE PIETRO. — *Sui bilanci delle società anonime in regime fascista.* Discorso inaugurale dell'anno accademico 1929-30, R. Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali di Genova.

DE FINETTI BRUNO. — *Ancora sull'estensione alle classi numerabili del teorema delle probabilità totali.* Milano 1930.

ID. — *A proposito dell'estensione del teorema delle probabilità totali alle classi numerabili.* Roma, 1930.

ID. — *Calcolo della differenza media.* Roma, 1930.

ID. — *Caratteristiche di un'omografia vettoriale,* etc. Roma, 1930.

ID. — *Curve tipiche iperosculatrici.* Bologna, 1930.

ID. — *Fondamenti logici del ragionamento probabilistico.* Roma, 1930.

ID. — *Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio.* Città di Castello, 1930.

De Finetti Bruno. — *Introduzione matematica alla statistica metodologica.* Roma, 1930.
Id. — *L'equilibrio stabile in un campo di velocità.* Roma, 1930.
Id. — *Le funzioni caratteristiche di legge istantanea.* Roma, 1930.
Id. — *Problemi determinati e indeterminati nel calcolo delle probabilità.* Roma, 1930.
Id. — *Spazi astratti metrici.* Roma, 1930.
Id. — *Sul concetto di numero delle dimensioni di un sistema lineare.*
Id. — *Sui passaggi al limite nel calcolo delle probabilità.* Milano, 1930.
Id. — *Sulla proprietà conglomerativa delle probabilità subordinate.* Hoepli, Milano, 1930.
Id. — *Sulla stabilità dei punti zero di un campo vettoriale piano.* Bologna, 1930.
De Giaxa Vincenzo. *Igiene delle città.* « Trattato Italiano di Igiene ». Torino, 1930.
Degli Espinosa Agostino. — *La bilancia dei pagamenti internazionali degli Stati Uniti d'America.* « Economia », Vol. VI, N. 1-4, 1930.
De Magistris Luigi Filippo. — *Definizione e posizione della geografia botanica.*
Id. — *Lo stato attuale della conoscenza della distribuzione della malaria nell'Italia Meridionale.* Napoli, 1930.
De Michelis Giuseppe. — *La crisi economica mondiale.* Roma, 1930.
Id. — *Una migliore distribuzione della popolazione della terra e dei capitali.* Roma, 1931.
Dell'Agnola Carlo Alberto. — *Le variabili casuali nella teoria matematica delle assicurazioni sulla vita.* Venezia, 1931.
Del Vecchio Gustavo. — *Teoria della esportazione del capitale.*
De Riso Osvaldo. — *La industria della seta a San Paolo.*
De Vergottini Mario. — *Sviluppo demografico e migrazioni interne in Italia.* Trieste, 1928.
Di Castelnuovo Arturo. — *Dalla guerra senza odio all'idilio. Gioia ed esultanza del popolo.* Roma, 1930.
Ditt Ernst. — *Pier Candido Decembrio.* Contributo alla storia dell'Umanesimo Italiano. Milano, 1931.
Dogliotti Mario. — *Curriculum vitae ed elenco riassuntivo delle pubblicazioni.* Torino 1931.
Ente Nazionale Italiano per l'Organizzazione scientifica del lavoro. — *Relazione al Consiglio generale sulla attività dell'anno* 1930.
E.N.I.T. — *Gli alberghi in Italia.* 1931.
Fantini Oddone. — *Educazione e cultura cooperativa in Italia e all'estero.* Roma, 1930.
Fasolis Giovanni. — *Associazioni e contributi sindacali.* « Rivista di Politica Economica ». Fasc. 2, 1930.
Federazione Fascista dei Commercianti. — *Il Friuli turistico.*
Federazione Naz. Fascista della Proprietà Edilizia. — *Il primo censimento fascista.* 21 aprile 1931.
Id. — *La fine del vincolismo degli affitti.* Relazione N. 29.
Id. — *Lo sviluppo dell'organizzazione della proprietà edilizia.* Relazione, N. 28.
Id. — *Memoriale sulla cosiddetta « Proprietà commerciale ».* Roma, 1929.

FEDERICI LUIGI. — *La teoria dei prestiti esteri e la pratica italiana.* « Giornale degli Economisti », settembre 1929.

FERRARI CIRO. — *La campagna veronese all'epoca veneziana,* Venezia, 1930.

FOÀ C. — *Norme e misure di economia degli alimenti.* « Archivi di Scienze Biologiche », novembre 1930.

FORNACIARI BRUNO. — *I servizi antitubercolari in Italia durante il* 1929. Roma, 1930.

FOSSATI ANTONIO. — *Bilanci, tributi, redditi e valori negli Stati Sardi di terraferma dalla restaurazione all'avvento di Carlo Alberto.* Milano, 1930.

ID. — *Contributo critico alla interpretazione della statistica demografica del comune di Torino.* Torino, 1929.

ID. — *Osservazioni sulla abolizione delle « tasse » e « bannalità coattive » in Torino ai tempi di Carlo Alberto.* Torino, 1930.

ID. — *Una introduzione allo studio dei cicli e delle crisi economiche.* Roma, 1931.

FOSSATI ERALDO. — *Il regolamento del problema delle riparazioni germaniche dal piano Dawes al piano Young.* Pavia, 1929.

FRASSETTO FABIO. — *Crania Etrusca. Le forme craniche degli etruschi e il problema delle origini etrusche.* « Rivista di Antropologia », Vol. XXVIII.

ID. — *Sistema di normalità fra statura, perimetro toracico e peso nelle norme per il reclutamento.* « Rivista di Antropologia », Vol. XXVII. 1928-29.

FUBINI RENZO. — *Nuove note sulla teoria dell'interesse.* « Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica, 1930.

ID. — *Osservazioni in tema di protezionismo amministrativo.* « Archivio Scientifico ». 1930-31.

ID. — *Sugli effetti della esenzione dell'imposta sui fabbricati per le case di nuova costruzione,* Torino 1931.

ID. — *Teoria del Credito e della Banca* « Rivista Bancaria » marzo, 1930.

FULCHERI MICHELANGELO. — *Lo spopolamento delle valli.* Cuneo, 1930.

GALVANI LUIGI. — *L'Atlante statistico italiano.* Parte I. 1930.

GARINO CANINA ATTILIO. — *Il principio produttivista dell'imposta ed il sistema tributario italiano.* Padova, 1930.

GEMELLI AGOSTINO. — *Problemi della psicologia sperimentale nello studio degli esercizi fisici.* 1930.

GIANFERRARI LUISA. — *Sull'azione dei raggi X nelle planarie.* Milano, 1930.

GIANNINI AMEDEO. — *Il movimento internazionale per l'unificazione del diritto commerciale.* Milano, 1931.

GIASOTTO ENZO. — *Integriamo la « Battaglia del grano ».* « Echi e Commenti », N. 31, novembre 1926.

GINI CORRADO. *L'Atlante statistico italiano.* Roma, 1931.

GINI C. E D'ADDARIO. — *La distribuzione dei redditi mobiliari in Italia.* XIX Sessione dell'Istituto Internazionale di Statistica. Tokio, 1930.

GIULIANI SANDRO. — *Assestamento e rinascimento dell'Albania.* Milano, 1929.

GRAFFI E. — *Proporzioni corporee e caratteri somatici di un gruppo di studentesse dell'Università di Bologna.* Nota I^{a} ; II^{a}. Bologna, 1930.

GRAZIOLI V. — *Prospetto statistico degli impianti ed apparecchi sottoposti al controllo termico.* « Il Calore », N. 7, luglio 1930.

ID. — *Statistica generale degli apparecchi a pressione iscritti nell'A.N.C.C. al* 31 *dicembre* 1929. Roma, 1930.

GRUPPO SOCIETÀ ADRIATICA DI ELETTRICITÀ. — *Il Gruppo Società Adriatica di Elettricità e la sua attività tecnica ed economica dalle origini al* 1929.

GUADAGNI B. — *Uva e succo d'uva.* 1930.

GUALTIERI G. VITTORIO. — *Simpatia ultima musa.* Catania, 1929.

GUASTI A. — *Studi sul diritto commerciale degli Stati Uniti di America,* Milano, 1930.

INAUGURAZIONE DELLA NUOVA SEDE DELLA PONTIFICIA UNIVERSITÀ GREGORIANA. Roma, 1930.

INDICATORE DELLA PROVINCIA DI UDINE. 1930.

INSOLERA FILADELFO. *Aspetti storico-statistici delle assicurazioni private.* Roma, 1930.

ID. — *Di una funzione di sopravvivenza.* « Giornale di Matematica Finanziaria », Vol. XII, N. 4-6, 1930.

ID. — *Il VII Censimento generale della popolazione, scopi e modalità.* Torino, 1931.

ID. — *Sull'adeguamento dei costi delle assicurazioni sociali alla potenzialità economica della nazione.* Torino, 1931.

ISTITUTO CENTRALE DI STATISTICA DEL REGNO. — *Regolamento interno.* Roma, 1930.

ISTITUTO ITALIANO DI CREDITO MARITTIMO. — *Relazione sul bilancio al* 31 *dicembre* 1930.

ISTITUTO ITALIANO DI DIRITTO INTERNAZIONALE DI ROMA. — *L'Italia nell'organizzazione internazionale del lavoro della Società delle Nazioni.* Roma, 1930.

ISTITUTO NAZIONALE PER L'ESPORTAZIONE. *Relazione sull'attività dell'Istituto.* 1930.

ID. — Id. 1931.

ISTITUTO NAZIONALE SVIZZERO DI ASSICURAZIONE CONTRO GLI INFORTUNI. *Relazione annuale e conti del* 1929.

ISTITUTO NAZIONALE DELLE ASSICURAZIONI. — « *Atti* » *Vol. II, Conferenze di cultura assicurativa dell'anno* 1929.

ID. — *Relazione del Consiglio d'Amministrazione e del Collegio dei sindaci sul bilancio* 1929.

ISTITUTO POLIGRAFICO DELLO STATO. — *Bilancio al* 30 *giugno* 1930 *e relazioni.* Roma, 1930.

R. ISTITUTO SUPERIORE DI SCIENZE ECONOMICHE E COMMERCIALI DI BARI. — *Archivio scientifico,* Vol. III, 1928-29.

REALE ISTITUTO VENETO DI SCIENZE LETTERE ED ARTI. « *Atti* » Anno accademico 1929-30, Tomo LXXXIX, Venezia.

L'ITALIA TURISTICA. — *Annuario Generale — Sport, Turismo, Industrie applicate.* Firenze, 1930.

JOSA GUGLIELMO. — *L'indirizzo dell'allevamento degli ovini nelle regioni centrali e meridionali appenniniche dell'Italia per l'aumento della produzione della carne e della lana.* Ministero dell'Economia Nazionale. Roma, 1927.

JUCCI CARLO. — *Come si eredita la capacità di accrescimento negli incroci reciproci tra le due razze di bachi da seta Varo e Bianco Cinese.* Napoli, 1929.

ID. — *La variabilità individuale della capacità di partogenesi in razza bivoltina di bachi da seta.* Napoli ,1928.

ID. — *L'eredità citoplasmatica.* — « Studi sassaresi », Serie II, Vol. VII, Fasc. I, 1929.

JUCCI CARLO. — *Notizie sui lavori di Carlo Jucci.* Sassari 1930.

ID. — *Sul colore del bozzolo e la migrazione dei pigmenti dal sangue alla seta nella F_1 di incroci reciproci tra le razze di bachi oro cinese, gialla indigena, e bianca giapponese.* Roma, 1930.

LA REVISIONE DEL TRATTATO DEL TRIANON. — *La lettera accompagnatoria di Millerand e le Commissioni per la delimitazione delle frontiere.* N. I, III, V, VII. Budapest, 1928.

LASORSA GIOVANNI. — *Alcune ricerche intorno al salario differenziale.* Firenze, 1929.

ID. *Recenti vedute intorno ai salari.* Roma, 1930.

LA STELLA MARIO. — *Come si fa un grande giornale?* « Scienza e Vita », aprile 1930.

LATTES LEONE. — *Commissione Internazionale per lo studio dei gruppi sanguigni* (Resoconto della conferenza di Parigi). Torino, 1930.

LIBRANDO GAETANO. — *La produzione agricola similare italo-spagnuola.* Catania, 1930.

LOLETTO GIORGIO. — *Note geografiche sulla distribuzione delle vite nelle Alpi Occidentali.* Trieste, 1930.

LONGHI SILVIO. — *Discorso del Procuratore Generale.* Corte di Cassazione del Regno. Roma, 7 gennaio 1931.

MACALUSO ALEO GIUSEPPE. — *Fascismo e colonie.* Bengasi, 1930.

ID. — *Turchi, Senussi e Italiani in Libia.* Bengasi, 1930.

MAGNOCAVALLO ARTURO. — *Celebrazione del secondo millenario della nascita di Virgilio.* Istituto di Alta Cultura Italo-Brasiliano.

MALANDRA CELESTE. — *L'industria casearia nell'alto Polesine.*

MARCORA GIACOMO. — *L'azione civile di responsabilità contro gli amministratori di Società anonime.* Milano, 1931.

MARINA (LA) MERCANTILE ITALIANA. — *Confederazione Nazionale Fascista Imprese trasporti marittimi ed aerei.* Anno 1929.

MARIOTTI A. — *L'assicurazione dei viaggiatori.* Roma, 1930.

ID. — *L'importanza economica del Turismo.* Firenze, 1931.

ID. — *Paesaggi e poeti d'Italia.* Roma, 1930.

MARSELLA FABIO. — *La pressione arteriosa e la sua applicazione alla medicina delle assicurazioni.* Roma, 1930.

MASCI GUGLIELMO. — *Variazioni dei salari e dei prezzi.* C. E. D. A. M

MAZZEI JACOPO. — *I progetti di unione doganale Europea e l'Italia.* Firenze, 1930.

ID. — *Politica doganale differenziale e clausola della Nazione più favorita.* Firenze, 1930.

MEDICI GIUSEPPE. — *La legge del Mitscherlich e la sua applicazione nell'economia della fertilizzazione del suolo.* « Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica », gennaio 1930.

MENOZZI ANGELO. — *L'importazione di fertilizzanti e l'economia nazionale.* Roma, 1927.

MICHETTI GIACOMO. — *Studio sulla diffusione ed importanza della ricchezza posseduta in rapporto all'età dei possessori.* Savigliano, 1930.

MILLOSEVICH FEDERICO. — *Discorso inaugurale.* Anno Accademico 1930-1931.

MINISTERO DELL'AGRICOLTURA E DELLE FORESTE. — *Annali della sperimentazione agraria.* Vol. I, II, III, IV, V. Roma, 1930.

ID. — *Atti del Consiglio Superiore dell'Economia Nazionale.* Maggio 1929.

ID. — *Battaglia del grano in Italia.* Roma, 1930.

MINISTERO DELLE COMUNICAZIONI. — *Amministrazione delle ferrovie dello Stato. Relazione per l'anno finanziario* 1929-30.

ID. — *Dati relativi all'anno* 1927 *sui servizi pubblici automobilistici extra-urbani.* Roma, 1930.

ID. — *Dati statistici relativi all'anno* 1927 *sulle tranvie extra-urbane.*

ID. — *La marina mercantile italiana al* 31 *dicembre* 1927. Roma, 1930.

ID. — *Relazione per l'anno finanziario* 1928-29.

ID. — *Traffico viaggiatori e merci diviso per stazione.* — Anno 1927-1928. Roma, 1929.

ID. — *Annuario delle industrie chimiche e farmaceutiche.* 1928.

ID. — *Bollettino ufficiale delle Società per Azioni. Bilanci.* 1930.

ID. — Id. 1931.

ID. — *Relazione sull'attività svolta dal casellario infortuni nel VII anno di esercizio* (1929).

MINISTERO DELL'EDUCAZIONE NAZIONALE. — *Annuario degli Istituti medi pareggiati e privati, delle casse scolastiche annesse, dei convitti privati e delle fondazioni scolastiche.* 1930.

MINISTERO DELLE FINANZE. — *Aziende dei tabacchi, dei sali e del chinino dello Stato. Relazione e Bilancio per l'esercizio* 1928-29.

ID. — *Statistica delle imposte di fabbricazione dal* 1° *luglio* 1928 *al* 30 *giugno* 1929.

Id. — *Id. dal* 1° *luglio* 1929 *al* 30 *giugno* 1930.

ID. — *Le esperienze monetarie prima e dopo la guerra.* Vol. I e Vol. II. Roma 1927.

ID. — *Movimento commerciale del Regno d'Italia nell'anno* 1927.

ID. — *Movimento della navigazione del Regno d'Italia nel* 1927.

ID. — *La Relazione sulla consistenza dei terreni e dei fabbricati di proprietà dello Stato accertata al* 30 *giugno* 1929.

ID. — *Tariffa dei dazi doganali del Regno d'Italia.* Roma, 1931.

MINISTERO DELLA GIUSTIZIA E DEGLI AFFARI DEL CULTO. — *Statistica giudiziaria e penale per gli anni* 1925-1926.

ID. — *Statistica delle Carceri. Anno* 1926. Roma, 1930.

ID. — *Statistica dei riformatori per l'anno* 1926.

MINISTERO DELLA GUERRA. — *Della leva di terra sui giovani nati nell'anno* 1899. Roma, 1930.

MINISTERO DELL'INTERNO. — *Relazione al Consiglio superiore di Sanità.* Vol. I e Vol. II. Roma, 1930.

ID. — *Sui fatti e sui provvedimenti più importanti concernenti l'igiene e la sanità pubblica nell'anno* 1929. Roma, 1931.

MINISTERO DELLA MARINA. — *Relazione sulla leva marittima dei nati nell'anno* 1908.

MINISTERO DEI LAVORI PUBBLICI. — Consiglio Superiore Servizio Idrotografico. — *La produzione di energia elettrica in Italia.*

Ministero dei Lavori Pubblici. — *Le bonifiche italiane.* Roma, 1925.
Id. — *Le irrigazioni in Italia. Pubblicazione N° 8 del Servizio Idrografico.* Roma, 1931.
Id. — *Le opere pubbliche al 30 giugno 1929.*
Id. — *Id. al 31 dicembre 1929.*
Id. — *Statistica della navigazione interna sulle vie navigabili del Regno d'Italia.* Roma, 1930.
Modena Gustavo. — *Movimento dei malati di mente nei luoghi di cura durante il 1928.* Reggio Emilia, 1930.
Id. — *L'Ufficio di Statistica delle malattie mentali in Italia. I^a Relazione.* Ancona, 1926.
Molinari Pietra Maria. — *Sonetti,* 1930.
Monaco Valentino. — *Del fenomeno migratorio.* Palmoli, 1915.
Id. — *Statistica dei prezzi in Italia.* Palmoli, 1915.
Monti Augusto. — *Rossobiancoverde e azzurrobiancorosso (Ungheria e Jugoslavia).* Roma, 1931.
Moretti Vincenzo. — *La dottrina dei tre principî di Emanuele Sella.* Torino, 1930.
Id. — *Sopra alcuni problemi di dinamica economica.* Città di Castello, 1929
Morgani Manlio. — *L'Agenzia Stefani nella vita nazionale.* Milano, 1930.
Morselli Emanuele. — *Corso di Scienza della Finanza pubblica.* Padova, 1930.
Muro Mario. — *Il pensiero economico di Gesù.* Roma, 1931.
Olivetti Gino. — *Il credito occorrente alle industrie.* Ministero dell'Economia Nazionale. Roma, 1927.
Opera Nazionale Dopolavoro. — *L'attività dell'O. N. D. al 31 dicembre 1929.*
Orlando Paolo. — *Il canale da Pisa a Livorno.* — « Realtà », 1° luglio 1930.
L'Organizzazione Internazionale del Lavoro. — 1919-1929.
R. Osservatorio Astro-fisico di Catania. — *Annuario* 1930.
Pagliari Ettore. — *La proprietà commerciale e l'industria alberghiera.* Napoli, 1931.
Pagni Carlo. — *A proposito di un tentativo di teoria pura del corporativismo.* « La Riforma sociale » fasc. 9-10, sett. ott. 1929.
Padova. — *La fiera di Padova.* Guida-Padova, 1931.
Papi Giuseppe Ugo. — *Conseguenze dei prestiti di Stato sul mercato dei capitali.* Città di Castello, 1931.
Pearl, Raymond. — *Alcool e biologia umana.* Siena, 1931.
Pergola. — *La difterite.* « Trattato Italiano di Igiene ». Torino, 1930.
Perondi Giuliano. — *Il problema della eredità tubercolare considerato dal punto di vista dell'Eugenica.* Milano, 1930.
Petronelli Mario. — *Il principio della non retroattività delle leggi in diritto canonico.* Milano, 1931.
Picone M. — *Possibilità di calcolo numerico sui problemi continui di matematica attuariale.* Roma, 1929.
Piazzolla Beloch Margherita. — *La matematica in relazione alle sue applicazioni e al suo valore educativo.* 1929-30. Ferrara.
Porri Vincenzo. — *Corso di Politica economica internazionale.* Roma, 1930.

Pozzato Paolo. — *Morbilità e urbanesimo.* 1931.

Presidenza del Consiglio dei Ministri. — *Bollettino ufficiale della legge 24 dicembre* 1925. Vol. I, II, III.

Puggioni A. — *Assicurazione in caso di morte a capitale variabile in progressione geometrica.* Roma, 1930.

Razza Luigi. — *Le migrazioni interne.* Roma, 1930.

Recanatesi Alberto. — *Per il VI Censimento generale della popolazione.* « La proprietà edilizia italiana » N. 10-11 1930.

Relazione pronunciata dal Presidente della Camera di Commercio Italiana in Londra alla Assemblea Generale dei Soci. 1930.

Rendiconti del Seminario matematico e fisico di Milano. Vol. III, 1929.

Repaci Francesco Antonio. *La gestione delle Ferrovie dello Stato nel sessennio* 1923-24, 1928-29. Torino, 1930.

Id. — *La gestione delle ferrovie dello Stato nel* 1929-30.

Id. — *L'imposta sul valore locativo nelle proposte della Commissione di studio per la riforma delle finanze locali e nelle dissenzioni parlamentari.* Torino, 1931.

Revelli Paolo. — *Il Congresso geografico di Napoli.* « Aevum », gennaio-marzo, 1930.

Id. — *Per una biblioteca geografica italiana degli Stati Americani.* Napoli, 1930.

Id. — *Un trattato geografico-politico di Giuseppe Moletti (1580-81).*

Ricci Ettore. — *Conche di Piave.* Belluno, 1930.

Id. — *Popolazione e produzione granaria.* Macerata, 1904.

Ricci Federico. — *Disoccupazione, finanze, tributi e critiche al progetto di riforma dei tributi locali.* Roma, 1930.

Id. — *La marina da carico. Il porto di Genova.* Discorso del 22 maggio 1930.

Id. — *Podestà, consulte e finanze dei grandi comuni.* Roma, 1930.

Id. — *Sul consuntivo dell'esercizio* 1928-29. Roma, 1930.

Rocca Carlo. — *La navigazione aerea dal punto di vista economico.* Hoepli, 1929.

Roletto Giorgio. — *Le caratteristiche geografico-economiche dei comuni delle Alpi Occidentali.* Trieste, 1930.

Id. — *Le condizioni geografico-economiche di un Comune Alpino.* 1930.

Romanelli. — *Le cause di morte in rapporto alle misure somatiche.* Torino, 1928.

Rossi Ettore. — *Lo scambio obbligatorio delle popolazioni tra la Grecia e la Turchia.* Roma, 1930.

Sacco Federico. — *Il glacialismo nelle Valli Sesia, Strona, Anza e nell'Ossola.* Roma, 1930. Ministero dei LL. PP.

Sacerdoti G. M. — *La tutela delle operaie ed impiegate durante lo stato di gravidanza e di puerperio e l'assicurazione di maternità.* U.S.I.L.A. 1931.

Satta Salvatore. — *Contributo alla dottrina dell'arbitrato.* Milano, 1931.

Santacroce Guido. — *Sopra un metodo di calcolo del valore attuale di alcune notevoli assicurazioni su gruppi di teste.* « Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari ». Aprile, 1931.

Satta Dessolis Antonio. — *Il problema demografico sardo.* Cagliari, 1929.

Savorgnan Franco. — *Economicità e anti-economicità nell'aumento naturale della popolazione.* Torino, 1930.

Id. — *La politica demografica dell'Italia e le sue finalità.* « Le Assicurazioni sociali ». N. 1, 1931.

SERENA AUGUSTO. — *Il canale della Brentella e le nuove opere di presa e di derivazione.* Treviso, 1929.
SERPIERI A. — *La legge sulla bonifica integrale.* Roma, 1931.
SFAMENI P. — *La dilatazione attiva o vitale dell'utero ed il suo sviluppo storico.* Bologna, 1929.
ID. — *Per un nuovo corpo di dottrina ostetrica.* Bologna, 1930.
SIMONCELLI DOMENICO. — *La riforma del diritto minerario italiano.* Vol. 2. Roma, 1931.
ID. — *L'interesse della collettività nella nuova legislazione mineraria.* Roma, 1930.
SITTA PIETRO. — *Il Credito Agrario, le Casse di Risparmio e le Borse Merci.* Roma, 1931.
ID. — *La previdenza, l'assistenza sociale e la propaganda corporativa.* Roma, 1930.
SOCIETÀ ITALIANE PER AZIONI. — *Notizie statistiche.* Ed. XII.
SOCIETÀ DELLE NAZIONI. — *Dieci anni di cooperazione internazionale.* Roma, 1930.
SOCIETÀ PER LO SVILUPPO DEL'ALBANIA. — *Relazione sulle opere eseguite al 31 dicembre* 1929. Marzo, 1930.
SOLER EMANUELE. — *Due campagne sgravimetriche sul Carso compiute dall'Istituto di Geodesia della R. Università di Padova nel* 1923.
L. SPADA DI ALFEDENA. — *Italiani Memento !* Roma, 1928.
STAEHLE HANS. — *Sopra alcuni problemi di dinamica economica.* Città di Castello, 1930.
STATISTICA GENERALE DEGLI APPARECCHI A PRESSIONE ISCRITTI NELL'A.N.C.C. *al 31 dicembre* 1930.
STRUMIA EDOARDO. — *Scuole ed Accademie francesi nel settanta.* Cuneo, 1931.
STUDI ECONOMICO-GIURIDICI DELL'ISTITUTO ECONOMICO-GIURIDICO DELLA R. UNIVERSITÀ DI CAGLIARI. Anno 1930-31.
STUDI NELLE SCIENZE GIURIDICHE E SOCIALI. *Istituto di Esercitazione presso la facoltà di Giurisprudenza.* Pavia, 1931.
SUSMEL EDOARDO. — *Mussolini e il problema adriatico.* Roma, 1930.
TAGLIACARNE GUGLIELMO. — *Per un dizionario di semiologia economica.*
ID. — *I matrimoni.* « Giornale degli Economisti e Riv. di Stat. ».
ID. — *Popolazione e progresso.* « Cultura Moderna ». 1930
TASSINARI GIUSEPPE. — *La distribuzione del reddito nell'agricoltura italiana.* Piacenza, 1931.
TEDESCHI BRUNO. — *Sul calcolo approssimato dell'ultima annualità nell'ammortamento di un prestito con annualità costante prefissata.* « Rivista Italiana di Ragioneria ». Roma, 1930, Fasc. 7-8.
ID. — *Una generalizzazione del problema delle concordanze.* Trieste, 1930.
TIRELLI MARIO. — *Fisiologia degli insetti.* Roma, 1929.
ID. — *La viscosità nelle uova degli incroci del Bombyx mori.* R. Stazione Bacologica Sperimentale di Padova.
ID. — *Mutamento irreversibile nella viscosità delle uova di Bombyx mori L* ». Roma, 1930.
ID. — *Relazione viscosa impedita dalla fecondazione e aumento viscoso seguito da sviluppo di uova di Arbaccia aequitubercolata.* Genova, 1930.
ID. — *Studi sulla fisiologia del sistema nervoso degli insetti.* Roma, 1929.

TIVARONI J. — *Il metodo statistico di Irving Fisher per la misura della utilità finale ed una recente critica ad essa rivolta.* Da « Rivista di Politica Economica, Anno XIX, 1929, Fasc. XII.

ID. — *Le espropriazioni di terreni per cause fiscali negli anni* 1923 *e* 1924. Roma, 1929.

TRAVAGLINI VOLRICO. — *Gli schemi teorici del movimento della popolazione.* Perugia, 1929.

TREMELLONI ROBERTO. — *Il mito dell'ora : razionalizzazione.* Roma, 1931.

TULLIO PIETRO. — *La forma delle lettere minuscole e maiuscole desunte dai manoscritti di una sola regione dal quattrocento in poi.*

ID. — *Origine dell'alfabeto.* Roma, 1930.

USAI GIUSEPPE. — *Considerazioni sulle prove ripetute.* Catania, 1930.

ID. — *Il numero come forza.* Catania, 1929.

ID. — *Sull'ammortamento con annualità in progressione geometrica.* « Giornale di Matematica finanziaria ». Anno 1930.

ID. — *Sulle variazioni di un vitalizio continuo.* Bologna, 1930.

ID. — *Sul problema delle concordanze.* Id.

ID. — *Una proprietà di inversione in un vitalizio continuo.* Bologna, 1930.

BORIS V. VASSILEF. — *La responsabilità penale del tubercolotico dal punto di vista medico-legale.* Genova, 1930.

VERGOTTINI MARIO. — *I fenomeni demografici come base di quelli economici.* Trieste, 1930.

VERONESE GIACOMO. — *L'attività alberghiera in Italia nel quinquennio dal* 1926 *al* 1930.

VIRGILIO. — Vol. I° : *Bucolica et Georgica.* Roma, 1930.

VITA AGRICOLA MANTOVANA IN CIFRE. Mantova, 1930.

VITO FRANCESCO. — *I sindacati industriali.* Milano, 1930.

VOLPI DI MISURATA G. — *L'abolizione del corso forzoso. La convertibilità in oro della lira.* Roma, 1928.

WOLLEMBORG LEONE. — *Le barriere daziarie.* Roma, 1930.

ZUGARO FULVIO. — *Le ricompense al valor militare di un secolo fino al* 1929.

ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'UKRAINE. — *La mortalité dans les quatre plus grandes villes de l'Ukraine en* 1923-1929.

A. ANDRÉADÈS. — *La population du Japon.* « La Revue Economique Internationale ». 1931.

ANNUAIRE DES ASSURANCES SOCIALES EN POLOGNE. Varsovie 1928.

ANNUAIRE DU COMMERCE EXTÉRIEUR DE LA RÉPUBLIQUE POLONAISE ET DE LA VILLE LIBRE DE DANTZIG. 1929.

ANNUAIRE DU COMMERCE EXTÉRIEUR DE LA RÉPUBLIQUE POLONAISE ET DE LA VILLE LIBRE DE DANTZIG. 1929-30.

ANNUAIRE STATISTIQUE DE LA GRÈCE. 1930.

ANNUAIRE STATISTIQUE DE LA FINLANDE. 1929.

ID. 1930.

ANNUAIRE STATISTIQUE DE L'INDOCHINE. — *Recueil statistique relatif aux années* 1913-1922. Hanoï, 1927.

ID. — 1923-29.

Annuaire statistique judiciaire. — *Ministère de la Justice de l'Egypte. Juridictions, indigènes, charicks, Hasbrjs et Mixtes.* Année 1928-29.
Annuaire statistique de la Lettonie. 1929.
Annuaire statistique de l'Office Central de la République Turque. *Année* 1930.
Annuaire Statistique du Royaume de Bulgarie. 1928.
Id. 1929-30.
Annuaire statistique du Royaume d'Egypte. 1928-29.
Annuaire Statistique. Statistique Générale de la France, 1928.
Annuaire Statistique de la Ville de Paris. *Année* 1925-26.
Annuaire statistique des Villes de la Pologne. 1930.
Antipa G. — *L'occupation ennemie de la Roumanie et ses conséquences économiques et sociales.*
Aperçu statistique de la République Tchécoslovaque. Prague, 1930.
Atsushi Sakamoto et Koren-ko. — *Etudes statistiques sur les effets eugéniques de la guerre.* Institut International de Statistique. XIX^e Session, Tokio, 1930.
Balas Charles. *La question « Quo Vadis » dans la démographie moderne.* Budapest, 1930.
Balzac Honoré de. — *Physiologie du mariage.* Paris, 1876.
Baudhuin Fernand. — *Finances Belges. La stabilisation et ses conséquences.* Louvain, 1928.
Id. — *La Belgique après le centenaire.* Paris, 1931.
Bernard Léon. — *De la spécialisation en médecine. La phtisiologie est une spécialité.* Paris, 1928.
Bilan des Paiements de la Pologne pour l'année 1929.
Bouglé C. — *De la sociologie à l'action sociale.* Paris, 1923.
Bulletin de l'Institut International de Statistique. — *Tome XXIV, 2ème livraison.* Varsovie, 1930.
Bureau International du Travail. — *Bibliographie du chômage.* Genève, 1930.
Id. — *Dix ans d'organisation internationale du travail.* Genève, 1930.
Id. — *Etudes sur les relations industrielles.* Genève, 1930.
Id. — *La durée du travail dans les mines de charbon.* Genève, 1930.
Id. — *La durée du travail des employés.* Id.
Id. — *L'enseignement professionnel agricole.* Genève, 1929.
Id. — *La liberté syndicale.* Vol. V. Genève, 1930.
Id. — *L'année sociale* 1930.
Id. — *La politique du logement en Europe.* Genève, 1930.
Id. — *La protection des ouvriers travaillant aux presses à métaux.* Genève, 1930.
Id. — *Le droit du contrat de travail des ouvriers agricoles d'Allemagne, d'Autriche et de Hongrie.* 1930.
Id. — *Les conditions et les règlementations des conditions du travail dans l'U. R. S. S.* Genève, 1930.
Id. — *Les méthodes de la statistique des accidents dans les chemins de fer.* Genève 1929.
Id. — *Id.* 1930.
Id. — *Les méthodes de la statistique de la morbidité et de la mortalité professionnelle.* Genève, 1920.

BUREAU INTERNATIONAL DU TRAVAIL. — *Organisations coopératives*. Genève, 1929.
ID. — *Principes et méthodes de fixation des salaires dans les mines de charbon*. Genève, 1931.
ID. — *Problèmes du chômage en* 1931.
ID. — *Recueil international de Jurisprudence du Travail*. Genève, 1929.
ID. — *Id.* 1928.
ID. — *Règlementations des heures de travail à bord des navires*. Gèneve, 1931.
ID. — *Travail forcé*. Genève, 1930.
CADOUX M. G. — *Projet d'Organisation Internationale de la Statistique du Tourisme*. Le Caire, 1927.
COLLINET PAUL ET STAHL PAUL. — *Le ravitaillement de la France occupée*. « Histoire économique et sociale de la guerre mondiale ». 1930.
CONFÉRENCE ECONOMIQUE INTERNATIONALE. — Prague, 4-6 octobre 1928.
CONFÉRENCE INTERNATIONALE DU TRAVAIL. — *La durée du travail dans les mines de charbon*. Genève, 1930.
ID. — *La durée du travail dans les mines de charbon*. 1931.
COSTANTINESCO MITITA. — *L'évolution de la propriété rurale et la réforme agraire en Roumanie*. Bucarest, 1925.
DANTZIG. — *Cité pitoresque*. 1928.
DARMOIS G. — *La structure et les mouvements de l'univers stellaire*. Paris, 1930.
DELEVSKY J. — *Les antinomies socialistes et l'évolution du socialisme français*. Paris, 1930.
DIVISIA FRANÇOIS. — *L'indice monétaire et la théorie de la monnaie*. Paris, 1926.
DUPONT EMILE. — *La faillite de l'Ecole cyclique ou Science et Statistique*. « La journée financière ». 7 septembre 1930.
DUPONT EMILE. — *L'économie mathématique*. « La journée Financière » 3 septembre 1930.
DURKEIM EMILE. — *L'éducation morale*. Paris, 1925.
EFFERTZ O. — *Le principe ponophysiocratique*. Paris, 1913.
E. N. I. T. — *Les hôtels d'Italie*. 1930.
ID. — *Villes d'art d'Italie*. 1930.
FRASSETTO FABIO. — *Les formes normales du crâne humain, leur génèse et leur classification*. « Bulletin de la Société de morphologie. 1929 », N. 3-4.
ID. — *Les formes normales du crâne humain*. « Revue Anthropologique ». N. 7-9, 1930.
FRÉCHET M. et ROMANN R. — *Représentation des lois empiriques par des formules approchées à l'usage des chimistes, des physiciens, de ingénieurs et des statisticiens*. Paris, 1930.
FRIGYES DE FELLNER. — *La charge hypothécaire de la propriété foncière dans la Hongrie actuelle et les problèmes du Crédit agricole*. Padova, 1929.
GOVAERTS A. — *Les caractéristiques morphologiques et pathologiques de la population belge*. Bruxelles, 1930.
HALBWACHS MAURICE. — *Les cadres sociaux de la mémoire*. Paris, 1930.
ID. — *Les causes du suicide*. Paris, 1930.
HENRY ALBERT. — *La règlementation des heures de travail dans l'agriculture*. Louvain, 1929.
HERSCH L. — *Population et chômage*. Genève, 1931.

INSTITUT INTERNATIONAL D'AGRICULTURE. — *Actes du Conseil International Scientifique agricole.* Vol. I, II. Rome, 1930.

ID. — *Annuaire international de statistique agricole.* 1929-30.

INSTITUT INTERNATIONAL DE STATISTIQUE. — *Statistique Internationale des grandes villes.* La Haye, 1931.

L'INSTITUT D'INVESTIGATIONS ÉCONOMIQUES. Barcellona, 1931.

INSTITUT UNIVERSITAIRE DES HAUTES ÉTUDES INTERNATIONALES. Genève, 1930-31.

JORDAN CHARLES. — *Sur la détermination de la tendance séculaire des grandeurs statistiques par la méthode des moindres carrés.* Budapest, 1930.

KINNEY W. HENRY. *La Mancdhourie moderne.* 1930.

KOHN STANISLAS. — *Importance et possibilité des recherches sur la formation et la prévision des prix dans l'agriculture.* Prague, 1931.

LA LITHUANIE EN CHIFFRES. 1918-1928.

LES CAHIERS DU SOCIALISTE. — *Cahier N.* 10. *Socialisme et dépopulation.* Paris, 1910.

MACHIALI M. — *Prévision du rendement du blé d'après les éléments météorologiques.* Paris, 1930.

MAHAIM ERNEST. — *Quelques questions de droit au sujet des conventions internationales du Travail.* Genève, 1929.

MANUEL DES VALEURS COTÉES À LA BOURSE DE GENÈVE. 1921-30. — *Société de Banque Suisse.* Genève, 1931.

MILLER. — *Rationalisation du dépouillement mécanique.* Revue Internationale des Sciences administratives. 1930, N° 3.

MINISTÈRE DES AFFAIRES ETRANGÈRES. — France. *Commission pour la révision des nomenclatures internationales des maladies.* Octobre, 1929.

MIRIMANOFF D. — *Le jeu de pile ou face et les formules de Laplace et de Eggenberger.* 1926.

MONNIER H. — *L'administration financière des vénitiens dans les îles jonniennes.* Paris, 1916.

MONTANDON GEORGE. — *Au delà de l'Ologénèse.* « Revue scientifique », juin, 1931.

MORTALITÉ ET DURÉE DE LA VIE DE LA POPULATION DE L'U.R.S.S. Moscou, 1930.

MOULEVITCH P. S. et WOLKOFF A. — *Accroissement de la population en rapport avec les indices de la natalité et de la mortalité.* Moscou, 1930.

PIRENNE H. — *La Belgique et la guerre mondiale.* « Les Presses Universitaires de France », 1930.

PTOUKHA M. — *Recueil démographique.* (Travaux de l'Institut Démographique. Tome VII). Karkow, 1930.

RECENSEMENT DES MÉNAGES DU NORD POLAIRE DE L'U.R.S.S. — 1926-27.

RECENSEMENT GÉNÉRAL DE LA POPULATION AU 28 OCTOBRE 1927. Fasc. III Ankara, 1929.

REGNAULT FÉLIX. — *Classification des sciences anthropologiques.* « Revue Anthropologique », N. 4-6, 1931.

RÉSUMÉ STATISTIQUE DE L'EMPIRE DU JAPON. — 44ème année. Tokio, 1930.

RÉSUMÉ STATISTIQUE DU MOUVEMENT DE LA POPULATION DE L'EMPIRE DU JAPON. Tokio, 1929.

RÉSUMÉ STATISTIQUE DES POIDS ET MESURES. — Ministère du Commerce et de l'industrie du Japon. 1929.

ROMANOWSKIJ V. — *Sur la loi de probabilité de fréquences assujettie aux conditions linéaires et le critérium X^2 de Pearson.*

ID. — *Sur les chaînes de Markoff.* Extrait des Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Le 6 mars 1929.

ID. — *Sur une extension du théorème de A. Liapounoff sur la limite de probabilité.* « Bulletin de l'Académie des Sciences de L'U.R.S.S. », 1929.

SAITO H. — *Sur la table de mortalité des Japonais N° 4* - XIX^e Session de l'Institut International de Statistique. Tokio, 1930.

SLUTSKY EUGÈNE. — *Quelques propositions sur les limités stochastiques éventuelles.*

ID. — *Sur l'erreur quadratique moyenne du coefficient de corrélation dans le cas des épreuves non indépendantes.* 1930.

ID. — *Sur l'extension de la théorie de periodogrammes aux suites de quantités indépendantes.*

SOCIÉTÉ DES NATIONS. — *Annuaire Statistique International.* 1929.

ID. — *Commerce International. Balance des paiements.* 1926-28. Genève, 1930.

ID. — *Conférence Internationale du Travail,* 14^e *Session.* Genève, 1930. Rapport du Directeur.

ID. — *Id.,* 12^ème *et* 13^ème *sessions.* Genève, 1929.

ID. — *Les statistiques démographiques officielles du Dominion du Canada.* Genève, 1930.

ID. — *Mémorandum relatif aux enquêtes sur les causes et la prévention de la mortinatalité et de la mortalité pendant la première année de vie.* Genève, 1930.

SOCIÉTÉ DES NATIONS. — *Mémorandum relatif aux enquêtes sur les causes et la prévention de la mortalité,* etc. Genève 1930.

ID. — *Mémorandum sur le Commerce International et sur les Balances de paiements.* 1926-1928.

ID. — *Mémorandum sur la production et le commerce* 1923-1928/29. Genève, 1930.

ID. — *Publications éditées par la Société des Nations du* 1^er *novembre* 1929 *au* 28 *février* 1930.

ID. — *Tableaux statistiques destinés à l'Annuaire sanitaire International.* Vol. VI. 1930.

SOREL GEORGE. — *Réflexion sur la violence.* Paris, 1930.

STATISTIQUE DÉMOGRAPHIQUE DE LA VILLE D'AMSTERDAM JUSQU'A L'ANNÉE 1921.

STATISTIQUE GÉNÉRALE DE LA FRANCE. — *Résultats statistiques du récensement de la population présente.* 7 mars 1926. Résultats par Département.

STATISTIQUE DE LA BELGIQUE. — *Salaires et durée du travail dans les industries texiles au mois d'octobre* 1901. Bruxelles, 1905.

STATISTIQUE DE LA BULGARIE. DIRECTION GÉNÉRALE DE LA STATISTIQUE. — *La population dans le Royame de Bulgarie : Naissances, décès, mariages en* 1926 *et en* 1927. Volume 2.

ID. — *Statistique agricole pour l'année* 1928. *Ensemencements et récoltes.* Sofia, 1926

ID. — *Statistique agricole pour l'année* 1929. *Ensemencement et récolte.* Sofia, 1930.

ID. — *Statistique du Commerce du Royaume de Bulgarie avec les pays étrangers en* 1928. Sofia, 1930.

Statistique de la Bulgarie. Direction Générale de la Statistique. — *Statistique des coopératives dans le Royaume de Bulgarie en* 1926.
Id. — *Statistique des coopératives dans le Royaume de Bulgarie en* 1927.
Id. — *Statistique criminelle pendant l'année* 1926-1927.
Id. — *Statistique de l'enseignement dans le Royaume de Bulgarie.* Année scolaire 1925-26.
Id. — *Statistique de l'enseignement. Année* 1927-28.
Id. — *Statistique du Commerce du Royaume de Bulgarie avec les pays étrangers en* 1929.
Statistique de la Finlande. — *L'imposition sur le revenu et la fortune pour l'année* 1926.
Id. — *Statistique des Industries. Année* 1929.
Statistique de l'Indochine. — *Industrie, Commerce, Finances. Année* 1930.
Id. — *Résumé statistique rétrospectif de l'Indochine.* 1913-1929.
Id. — *Statistique générale de l'Indochine.* 1929.
Statistique de l'Islande. — *État et mouvement de la population* 1921-1925.
Id. — *Statistique de l'Agriculture en* 1928.
Id. — *Statistique du Commerce en* 1928.
Id. — *Statistique de la pêche, de la chasse aux phoques et de l'oisellerie en* 1928.
Id. — *Statistique de la justice.* 1913-1918.
Statistique du Japon. — Bureau de la Statistique Générale. Cabinet Impérial. *Nombre des ouvriers au Japon et leurs salaires.* 1930.
Id. — *Population du Japon depuis* 1872.
Id. — *Résumé statistique du mouvement de la population de l'Empire di Japon.* 1929.
Statistique de la Lettonie. Bureau de Statistique de l'État Letton. *Commerce extérieur et transit de la Lettonie.* 1929.
Id. — *Id.* 1930.
Id. — *État de l'agriculture en Lettonie en* 1930.
Id. — *Id. en* 1929.
Id. — *Récensement agricole en Lettonie en* 1929.
Id. — *Id.* 1930.
Id. — *Résultats de la comptabilité agricole en* 1927-28 *et* 1928-29.
Id. — *Sociétés laitières de* 1909-1929.
Id. — *Statistique de l'Hygiène publique en* 1928.
Id. — *Id. en* 1929.
Id. — *Statistique du travail en* 1928.
Id. — *Id. en* 1930.
Id. — *Troisième récensement de la population en Lettonie en* 1930. Vols. 5.
Id. — *Id. Population par sexe et par section.* Riga, 1930.
Statistique de la Pologne. — *Office Central de Statistique de la République Polonaise.*
Id. — *Atlas statistique.* Varsovie, 1930.
Id. — *Budget des familles ouvrières.* 1927.
Id. — *Le petit annuaire statistique de la Pologne.* 1931.
Id. — *Le premier récensement général de la république Polonaise en* 1921. *Ménages.*
Id. — *Statistique des élections à la Diète et au Sénat.* 1930.
Id. — *Statistique des finances commerciales.* Varsovie, 1930.

Statistique de la Pologne. — *Statistique criminelle. Personnes comdannées et acquittées irrévocablement en* 1924 *et* 1925.
Id. — *Statistique judiciaire. Juridiction en matière civile et pénale. Année* 1926.
Statistique de la Suède. — *Comptes rendus du neuvième Congrès international d'actuaires à Stockolm du* 16 *au* 20 *Juin* 1930.
Statistique de la Tchécoslovaquie. — *Assistance publique en Tchécoslovaquie en* 1921.
Id. — *Centimes additionnels autonomes sur les impôts directs en* 1922.
Id. — *Commerce extérieur en* 1929. 1ère, 2me *partie.*
Id. — *Id. en* 1928.
Id. — *Id. en* 1927.
Id. — *Les établissements financiers en* 1920.
Id. — *Etudes géophysiques faites à Prague.* 1929.
Id. — *Industries agricoles en* 1925.
Id. — *Industrie meunière dans la République Tchécoslovaque pendant la campagne du 1-1923 au 30-1924.*
Id. — *La charge fiscale sur la consommation en* 1925.
Id. — *Manuel statistique de la République Tchécoslovaque.* Tom. III. 1928.
Id. — *Récensement des animaux de ferme au* 31 *décembre* 1925.
Id. — *Sociétés coopératives dans la République Tchécoslovaque en* 1919.
Id. — *Superficies ensemencées et récoltées des produits agricoles en* 1924.
Id. — *Id.* 1926.
Id. — *Id.*, 1927.
Statistique de l'Ukraine. — *Décédés de la Ville de Kieff en* 1918-1927. *Travaux de l'Institut Démographique.* 1930.
Travaux pour la Commission pour l'étude des finances. — *Livraisons II, III, IV, V.* Kiel 1929.
Yovanovitch Dragolioub. — *Les effets économiques et sociaux de la guerre en Serbie.* 1930.

Akermann Johan. — *Some lessons of the world depression.* Stockolm, 1931.
Allan J. E. and J. Wishart. — *A method of estimating the yield of a missing plot in field experimental work.* Cambridge, 1930.
Id. — *A percentile table of the relation between the time and the observed correlation coefficient from a simple of* 4. Harpenden, 1930.
Allard H. A. — *Our insect instrumentalists and their musical technique.* Smithsonian Report for 1928.
Annals of mathematical statistics. February 1930. May 1930.
Annual, Statistical, Report of the Tokyo Chamber of Commerce and Industry. 1929.
Annual, Report of the Industrial, Commission. 1929.
Annual, Report on Labor Strikes in Great Shangai. 1928.
Annual, Report on the Statistics of Labor for the year ending November 1930.
Arnold W. T. — *The Roman system of Provincial administration.* London, 1879.
Ashley W. J. — *An introduction to English economic history and theory.* London, 1894.

AUSTRIA TO-DAY. — *An exibition illustrating Austria's Economic progress.* « The London School of Economics ». March, 1930.

BAILEY WILLIS. — *Thomas Chrowder Chamberlin.* Washington, 1930.

BAKER G. A. — *Distribution of the means of samples of* n *drawn at random from a population represented by a Gram-Charlier series.* « The Annals of Mathematical Statistics ». August, 1930.

ID. — *The outlook for land utilization in the United States.* University of Illinois 1914.

ID. — *The significance of the product-moment coefficient of correlation with special reference to the character of the marginal distributions.* « Journal American Statistical Association ». December 1930.

BALY E. C. — *Photosynthesis.* Washington, 1930.

BANK OF FINLAND. 1929.

BANTA ARTHUR M. and L. A. BROWN. — *Control of sex in Cladocera I., Crowding the mothers as a means of controlling male production.* II, III, IV, V, VI. Chicago, 1929.

BANTA M. A. and R. WOOD. — *Genetic evidence that the cladocera male is diploid.* Cold Spring Arbor, 1928.

BANTA ARTHUR M. and THELMA. — *Inheritance in parthenogenesis and in sexual reproduction in Cladocera.*

BANTA ARTHUR M. — *The elimination of the male sex in the evolution of some lower animals.* Col Spring Harbor, 1930.

BARREL JOSEPH. — *On continental fragmentation and the geologic bearing of the moon's superficial features.* « Smithsonian Report for 1928 ».

BARTON R. J. — *Ifugao Economics.* University of California. Vol. 15, N. 5, April 1922.

BAXTER GREGORY P. — *Theodore William Richards.* « Smithsonian Reports, 1928 ».

BENNETT M. M. — *The Australian aboriginal as a human being.* London, 1909.

BERNHARDI VON. — *Germany and the next war.* London, 1914.

BETHAM-EDWARDS M. — *Travels in France by Arthur Young.* London, 1889.

BIGELOW GEORGE H. — *The cancer programm of Massachussetts.* Washington, 1930.

BLACKETT O. W. — *Factory Labor Turnover in Michigan.* Ann Arbor, 1928.

ID. — *Measures of business conditions in Michigan.* Ann Arbor, 1928.

BLICH N. M. — *Newly discovered chemical elements.* Washington, 1930.

BOELE-NIJLAND and VAN HERWERDEN. — *Investigation of blood groups in Holland.* Vol. XXXIII, N. 6, 1930.

BOOTH CHARLE. — *Labour life of the people East London.* Vol. I, London, 1889.

ID. — *Life and Labour of the people in London.* N. 7, Vols. London, 1896.

BOSANQUET BERNARD. — *Aspects of the social Problems.* London, 1895.

BOWLEY A. L. — *An elementary manual of Statistics.* London, 1910.

ID. — *National progress in wealth and trade.* London, 1904.

BOYCOTT E. — *The transition from life to death.* « Smithsonian Report », 1929.

BOYD EDITH, R. C. SCAMMON and DONOVAN LAWRENCE. — *The determination of surface area of living children.* 1930.

BOYD EDITH and R. SCAMMON. — *The relation of surface area to body weight in postnatal life.* 1930.

BRACEWELL MARY F., E. HOYLE, S. ZILVA. — *The antiscurvy vitamin in apples* « Medical Research Council ». 1930.

BRONSON REA GEO. — *The greatest civilizing force in Eastern Asia.* 1924.

BROOCKER A. KLUGH. — *Ecology of the red squirrel.* « Smithsonian Report, 1928 ».

THE BROOKINGS INSTITUTION. 1930.

ID. — *A catalog of publications.* 1931.

BROUGHTON T. R. S. — *The romanization of Africa proconsularis.* Baltimore, 1929.

BULLOCK CHARLES J. — *The American Money market.* Cambridge, 1930.

BUJAK FRANCIS. — *Poland's Economic Development.* London, 1926.

BUREAU OF STATISTICS. *Comparative statement of operating averages class I steam railways in the U. S.* — Interstate Commerce Commission Bureau of Statistics.

BUSNELL DAVID I. — *Mounds and other ancient earth works of the United States.* « Smithsonian Report for 1928 ».

CANADA DOMINION. Bureau of Statistics. — *Prices and prices index* 1913-28. Ottawa, 1930.

ID. — *The Canada year book* 1930.

CAIRNS LAURA. — *A scientific basis for health instruction in public schools.* Berkley, 1929.

CALKINS A. LEROY and R. SCAMMON. — *Empirical formular for the proportionate growth of the human fetus.* 1925.

ID. — *The growth of the spinal axis of the human body in prenatal life.* Proceedings of the Society for experimental biology and medicine 1927-XXIV.

CARPENTER NILES. — *Hospital service for patients of moderate means.* Washington 1930.

CASEY A. WOOD. — *Some adventure of naturalist in the Ceylon Jungle.* « Smithsonian Report for 1928 ».

CASSEL GUSTAVE. — *Foreign Investments.* Chicago, 1928.

CATALOGUE OF THE STATISTICAL WORK EXHIBITED AT KYOTO UNIVERSITY. Kyoto, 1930.

CATHCART P. AND M. T. MURRAY. — *A study in nutrition.* « Medical Research Council ». London, 1931.

CENSUS OF ENGLAND AND WALES. — *Preliminary Report,* 1931.

CHANG-HENG-CHEN. — *China's population Problem.* XIX^{e} session de l'Institut International de Statistique. Tokio, 1930.

CHINA. — *Trade return of North China.* 1928, Vol. I, II.

LEO CHIOZZA MONEY. — *Can war be averted ?* London, 1931.

CLARK MARJORIE RUTH. — *Au history of the French labor movement.* Berkeley, 1930.

COATS R. H. — *The classification problem in Statistics.* International Labour Review, April 1925.

ID. — *The place of statistics in national administration.* — *Function and organization of statistics* — *Scopes and methods of the Dominion Bureau of Statistics.* Ottawa, 1929.

C. COLSON. — *Transports & Tarifes.* Paris, 1898.

COMMITTEE OF THE PRIVY COUNCIL FOR MEDICAL RESEARCH. — *Report of the Medical Research Council for the year* 1928-29. London, 1930.

Compton Arthur H. — *What is light ?* Washington, 1930.
Cost of living index-number in Shangai. Shangai, 1930.
Craib W. H. — *The Electrocardiogram.* Medical Research Council, London, 1930.
Craigie James and I. Tulloch. — *Further investigation on the variola-vaccinia flocculation reaction.* London, 1931.
Craufurd James Dunlop. — *The increase in the National Cancer death-rate and its causation.* « Edinburgh medical journal », July 1930.
Crew E. and L. Mirskaia. — *The effects of density on an adult mouse population.* Edinburg, 1930.
Cronshaw. — *Soya products* « The food manufactures ». January 1929.
Charles C. Crowe. — *Statistical methods for research workers by R. A. Fisher,* 1930.
Cruickshank J. N. — *Child life investigations the causes of Neo-Natal Death.* London 1930. Medical Research Council.
Culloch J. R. M. — *A dictionary practical, theoretical and historical of commerce.* London, 1869.
Curry J. C. — *Climate and migrations.* « Smithsonian Report 1929 ».
Daly A. Reginal. — *X Raying the earth.* Washington, 1930.
Dampier Whetham William Cecil. — *The family and the nation.* London, 1909.
Darbishire A. D. — *On the difference between physiological and statistical laws of eredity.* Manchester Memoirs, Vol. I. 1906, N. 11.
Daroku Kikuchi. — *Japanese education.* London, 1909.
Darurin Leonard. — *What is eugenics ? The feeble in mind habitual criminals.* 1928.
Davenport C. B. — *Heredity and Longevity.* Carnegie Institution of Washington, 1930.
Id. — *Light thrown by genetics on evolution and developments.* Id.
Id. — *Litter Size and latitude.* Id.
Id. — *Relation between physical and mental development.* Eugenical News. Vol. XV, N. 6, June 1930.
Davis M. Michael. — *The need of hospitals for competent directors.* Washington, 1930.
De Geer Gerard. — *Geochronology as based on solar radiation and its relation to archeology.* « Smithsonian Report for 1928 ».
Department of Industry and Commerce. — *The agricultural output of saorstat. Eireann,* 1926-27.
Derevitzsky N. J. — *Statistical method in field trial.* Part. I. Taskent, 1930.
Dodd L. Edward. — *Classification of size or measurer by frequency functions.* 1931.
Id. — *Probability as expressed by asymptotic limits of pensils of sequences.* « The American Mathematical Society, April 1930 ».
Id. — *The use of linear functions to detect hidden periods in data separated into small sets.* « The annals of mathematical statistics », August 1930.
Dodge C. T. J. — *Weight of colored infants* « American Journal of physical anthropology », Vol. X, N. 3, 1927.
Donnan F. G. — *The mystery of life.* « Smithsonian Institution ». 1929.

DOUGLAS VIBER. *Island galaxies.* « Smithsonian Report ». 1928
DOUGLAS PAUL H. — *Real wages in the United States.* 1890-1926. Newton, 1931.
ID. — *The movement of money and real earnings in the United States.* 1926-28. Chicago.
ID. — *The movement of money and real earnings in the United States.* 1926-28. Chicago.
DOWELL MAC. E. C. and W. H. GATES. — *The influence of the quantity of nutrition upon the growth of the seeckling house.* « The Journal of General Physiology ». May, 20, 1930, N. 5.
DUBLIN I. LOUIS AND LOTKA A. J. — *The true rate of natural increase of the United States.* Roma, 1930.
ENVENTOFF L. — *Wages in the Soviet-Union and in the capitalist countries.* Moscou, 1930.
ELDERTON ETHEL M. — *On the marriage of first cousins.* London, 1911.
ID. — *The relative strength of nurture and nature.* London, 1909.
ELSWORTH R. H. — *Cooperative marking and purchasing,* 1920-1930. Washington, 1930.
FAMILY BUDGETS. — *Being the income and expenses of twenty-eight British households.* 1891-1894. London, 1896.
FAMILY COUNCIL LAW IN EUROPE. — *A study undertaken at the instance of the Eugenics society.* 1927-1929.
FIELDING OGBURN WILLIAM. — *Social change.* New York, 1928.
FINDLAY SHIRRAS G. — *Report on an enquiry into agricultural wages in the Bombay presidency.* Bombay, 1924.
ID. — *Report on an enquiry into the wages and hours of labor in the cotton-mill industry.* Bombay, 1923.
ID. — *Report on an enquiry into working class budgets in Bombay.* 1923.
FISHER A. R. — *Inverse probability.* Cambridge, 1930.
ID. — *Distribution of generations for race mutation,* 1929-30, Edinburgh.
ID. — *The moments of the distribution for normal samples of measures of departure from normality.* London, 1930.
FISHER M. ERNEST. — *Real estate subdividing activity and population growth in nine urban areas.* Ann Arbor, 1930.
FISHER IRVING. — *The money illusion.*
FLEXNER SIMON. — *Hideyo Noguchi.* Washington, 1930.
FLUX A. W. — *Our food supply, before and after the war.* The Journal of the Royal Statistical Society, Vol. XCIII, part IV, 1930.
FORD P. — *Soya Bean flour. Its value to the British confectioner.*
FRANK J. BRUNO. — *Illness and dependency.* Washington, 1930.
FRANKLIN P. D. — *Index-numbers of the quantities and prices of Imports and Exports of the barter terms of trade in China,* 1867-1928.
FRETS G. P. — *Alcohol and the others germs poisons.* The Hague, 1931.
FRIEDMANN HERBERT. — *Social parasitism in birds.* « Smithsonian Report for 1929 ».
FRISCH R. — *Correlation and Scatter in Statisticals variables.* « Nordic Statistical Journal ».
GAFAFER M. WILLIAM. — *Climatic intercorrelations.* Greenwich, 1876-1927.
ID. — *Upper respiratory disease (common cold) and the weather.* Baltimore, 1928.

GAMIO MANUEL. — *Quantitative estimate sources and distribution of Mexican immigration into the United States.* Mexico, 1930.

GARNER H. V. and WISHARTJ. — *Fertilizer trials in* 1929. London, 1930.

GESEL SILVIO. — *The natural Economic order.* Berlin, 1920.

GIBSON H. A. — *Human Economics.* Books 1 and 2. London, 1909.

GOGGIO EMILIO. — *Italians in American history*, N. 8.

ID. — *The drawn of Italian culture in America.* « The romanic review », Vol. X, N. 3, 1919.

GOLDRING WINIFRED. — *The oldest known pietrified forest.* « Smithsonian Report » for 1928.

GREGORY J. W. — *Water Divining.* « Smithsonian Report » for 1928.

GRIFFIN G. E. — *Sales quota systems.* Ann Arbor, 1929.

GRIFFITH STANLEY A. — *Studies of protection against tuberculosis.* « Medical Research Council », 1931.

GUIZOT M. F. — *General history of civilization in Europe.* Edinburg, 1848.

HASEGAWA T. — *Population of Japan,* 1920 *and* 1925. Institut International de Statistique XIX^me^ Session Tokio, 1930.

HECHT S. JOHNS. — *Unsolved problems : National and international.* London, 1930.

HERON DAVID. — *A first study of the statistics of insanity and the inheritance of the insane diathesis.* London, 1907.

ID. — *Mental defect, mal nutrition and the teacher's appreciation of intelligence.* London, 1911.

VAN HERVERDEN AND T. BOELE MIJLAND. — *Investigation of blood groups in Holland.* Vol. XX, N. 206, 1930.

HESDORFFER MEREDITH AND SCAMMON E. R. — *Growth of long-bones of human fetus as illustrated by the tibia.* « Proceedings of the society for experimental biology and medicine », 1928 XXV.

HEYL PAUL R. — *The lingering dryad.* Washington 1930.

HILTON J., KEER AND OTHERS. — *The other war.* London, 1920.

HOFFMAN L. — *Suicide problems.* 1927.

HOLMES S. J. — *Natural selection in man.* The Galton lecture, 1930.

HORNIBROOK E. A. — *A very valuable foodstuff, new to this country, which may take an outstanding place in the national dietary.* New Health, June 1929.

HRDLICKA ALES. — *The neanderthal phase of man.* « Smithsonian Report » 1928.

HUTCHINSON J. B. — *The application of the « method of maximum likelihood » to the estimation of linkage.* « Genetics ». November 1929.

HYMES CHARLES. — *The postnatal growth of the cornea and palpebral fissure and the projection of the eyeball in early life.* « The Journal of comparative neurology », Vol. 48, N. 3, October 1929.

I-CHIN-YUAN. — *Life tables for a southern Chinese family from* 1365 *to* 1849. « Human Biologie ». May 1931.

INDEX OF COUNTRIES IN DOMESDAS BOOK. London, 1899.

INDOO MC. N. E. — *Communication among insect.* « Smithsonian Report for 1928 ».

INTERNATIONAL LABOUR OFFICE. — *Unemployment and monetary fluctuations.* Geneva, 1929.

INTERNATIONAL CHAMBER OF COMMERCE. — *Business conditions at the present time.* Parigi, 1930.

INSTITUTE FOR BIOLOGICAL RESEARCH OF THE JOHNS HOPKINS UNIVERSITY, *Vol. IV*, 1930.
INSTITUTE OF POLITICS WILLIAMSTOURN. — Massachussetts. *Proceedings of general Conference August* 1 *and* 3 1930.
IRWIN J. O. — *Mathematical theorems involved in the analisis of variance.* London, 1931.
ITALY AND ROTARY. 1930.
JAMES CYRIL. — *Cyclical fluctuations in the shipping and shipbuilding industries.* Philadelphia, 1927.
JAPAN'S STATISTICS. — *A general survey of prefectural conditions of Tokio*, 1930.
ID. — *Annual Report*, 1929.
ID. — *Annual report on administration of Chosen*, 1927-1928.
ID. — *Annual Report of the department of communication*, 1925-29.
ID. — *The annual report of the Sanitary Bureau of the Home Department of the Imperial Japanese government for the year of shows* 1928.
ID. — *Annual Statistics of the infections diseases of animals for the year* 1929. Tokio.
ID. — *Arable land census of Japan proper* 1929.
ID. — *Current Economic Conditions.* The Tokio Chamber of Commerce and Industry. Tokio, 1930.
ID. — *Economic statistics of Japan* 1929. The bank of Japan.
ID. — *Fifty-third annual report of the Minister of State for education for the fourteenth statistical years of Taisho*, 1925-1926.
ID. — *A glimpse of Osaka.* 1930.
ID. — *Organisations, functions, publications of the Bureau of Statistics of the Imperial Cabinet.* Tokio, 1930.
ID. — *Periodical statistical publications in Japan.* Id.
ID. — *Statistical Abstract for Osaka* 1928. Osaka Municipal Office.
ID. — *Statistics of Japanese going and residing abroad.* 1920-29. Commercial Bureau 1920.
ID. — *The statistical abstract of the Ministry of Agriculture and Forestry.* December 1929.
ID. — *The Japan advertiser. Annual Review, finance, industry, and commerce.* 1929-30.
ID. — *The outline of the present system of statistical investigation concerning agriculture, forestry and fishery in Japan*, 1928.
ID. — *The rural life of Japan.* Published by the Bureau for Local Affairs. — Home Department, 1910.
ID. — *The statistics of the department of Commerce and Industry.* 1928.
ID. — *The twenty-ninth financial and economic annual of Japan*, 1929.
ID. — *Capital of Japan. Reconstruction work*, 1930.
ID. — *Tokyo Statistical Sketchs*, 1930.
JEANS JAMES. — *The physics of the universe.* Washington, 1930.
ID. — *The wider aspects of cosmogony.* « Smithsonian Report » for 1929.
JONESCU TAKE. — *The origins of the war, the testimony of a witness.*
JITTA JOSEPHUS A. C. — *Honnalnd's moderne renascence.* The Hague, 1930.
JOY H. ALFRED. — *The stars in action.* « Smithsonian Report » for 1928.
KALAMKAR R. J. — *An application of the resistance formula to potato data.* 1930.

KAMEDA T. — *Application of the method of sampling to the first Japanese population census.* Institut International de Statistique. Tokio, 1930.

KEMMERER WALTER EDWIN. — *The gold standard in the light of post-war developments.*

KLEIN A. D. and RICHARD E. SCAMMON. — *Relations between surface on weight and length of the human body in prenatal life.*

ID. — *The regional growth in surface area of the human body in prenatal life.* Proceedings of the society for experimental biology and Medicine, 1930.

KNOX INSLEY J. — *Commissioner of Labor and Statistics of Maryland,* 1930.

ID. — *Thirty-eight annual report of the Commissioner of Labor and Statistics of Maryland,* 1929.

KRIEGER HERBERT W. — *American indian costumes in the United National Museum.* « Smithsonian Report for 1928 ».

ID. — *The aborigenes of the ancient Island of Hispaniola.* Washington, 1930.

KUCZYNSKI ROBERT. — *Birth registration and birth statistics in Canada.* Washington, 1930.

KYOTO IMPERIAL UNIVERSITY. — *Kalendar* 1929-30.

LABOUR OFFICE, GOVERNMENT OF BOMBAY. — *Report on an enquiry into wages hours of Labour in the cotton mill industry.* Bombay, 1930.

LATIFI M. A. ALMA. — *Effect of war on property.* London, 1909.

LAUGHLIN HARVY H. — *The legal statute of Eugenical sterilization for the year* 1929.

LAYTON W. T. and RIST CHARLES.— *The economic situation of Austria.* League of Nations, 1925.

LEAGUE OF NATIONS. — *International Economic Conference.* Geneva, 1927.

ID. — *Statistics of notifiable diseases for the year* 1928. — Geneva, 1930.

THE LEGAL STATUTE OF EUGENICAL STERILIZATION. — *Supplement to the annual court of Chicago for the year* 1929.

LETOURNEAU CH. — *The evolution of marriage and of the family.* London. Walter Scott, 1891.

LEWTON L. FREDERICH. — *The servant in the house : a brief history of the serving machine.* Washington, 1930.

LOMBARD NORMAN. — *The future of meoney value.* New York, 1930.

LOTKA J. ALFRED. — *A natural population Norm.* « Journal of theWashington Academy of Science », Vol. III, N. 9.

ID. — *Relation between birth rates and death rates.* « Science », Vol. XXVI, N. 653, 1907.

ID. — *Studies on the mode of growth of material aggregates.* « American Journal of Science.», Vol. XXIV, 1907.

ID. — *The stability of the normal age distribution.* « National Academy of Sciences ces », November 1922.

REED LOWELL J. and THERIAULT EMERY J. — *The statistical treatment of Reaction-velocity data, I., II.* 1931.

LUNDBERG GEORGE L.. — *Public opinion from a behavioristic viewpoint* 1930.

ID. — *Social Research.* New York, 1919.

MACKAY HELEN M,. — *Nutritional Anaemia in infancy.* « Medical Research Council », 1931.

WILLEY MALCOLM M. — *The validity of the culture concept.* « American Journal of Sociology ». Vol. XXV, N. 2, September, 1929.

MANCHURIA. — *Detailed trade return of Manchuria*, 1928.

MARMER H. A. — *The gulf stream and its problem.* Washington, 1930.

MARSHALL ALFRED. — *Industry and trade.* London, 1919.

MARVIN L. NIEHUSS. — *Problems of long-term leases.* Ann Arbor, 1930.

MATSUDA T. — *The family budget enquiry in Japan* 1926-27. XIX Session de l'Institut International de Statistique. Tokio, 1930.

MAYER JOSEPH. — *Eugenics in Roman Catholic Literature.* Eugenics Vol. III, N. 2, February 1930.

MEAD CHARLES H. — *A quantitative study in human teratology.*

MEDICAL RESEARCH COUNCIL. — *A system of bacteriology in relation to Medicine.* London, 1929.

ID. — *Catalogue of the national collection of type culture.* London, 1931.

MEEKER J. EDWARD. — *Measuring the stock market.* Cleveland, 1930.

MELLANBY MAY. — *Diet and the threth. An experimental study.* Medical Research Council ,1930.

MELVILLE J. HERSKOVITS. — *The cultural approach to sociology.* « American Journal of Sociology », Vol. XXIX, N. 2, September 1923.

MENDELSON A. S. — *Indexes of current economic conditions of the U. R. S. S.* 1923-24-1928-29.

MERRELL HELEN LYND. — *Medical care in middletown.* Washington, 1930.

MERRELL MARGARET. — *The relationship of individual growth.* « Human Biology », 1931, February.

MILLER JUSTIN and GORDON DEAN. — *Civil and criminal liabiliy of physicians for sterilization operation.* « American Bar Association Journal », XVI 158-161, March 1930.

MILLER GERRITS S. — *Mammalogy and the Smithsonian Institution.* « Smithsonian Report for 1928 ».

ID. — *The controversy over human « Missing links ».* Smithsonian Report for 1928.

MILLIKAN R. A. and G. H. CAMERON. — *New results on cosmic rays.* « Smithsonian Report for 1928 ».

MILLS ALDEN B. — *The exient of illness and of physical and mental defects prevaling in the United States.* Washington 1929.

MINISTRY OF FINANCE OF EYGPT. — *Report on the external trade of Egypt during* 1929. Cairo, 1930.

MITMAN CARL W. — *The beginning of the mechanical transport era in America.* Washington 1930.

MIZUSHINA HARNO. — *The correlation between growth rates of population and vital factors by graphical districts.* « Human Biology », May 1931.

MJOËN JON A. — *Health declaration before marriage.* 1928.

MORI K. — *The estimate of the national wealth and income of Japan proper.* XIX^{me} session de l'Institut International de Statistique. Tokio, 1930.

MULLER H. J. — *Heritable variations, their production by X rays and their relation to evolution.* Washington, 1930.

NAGASAWA R. — *The method of statistical investigation concerning agricultural production in Japan.* XIX^{me} session de l'Institut International de Statistique. Tokio, 1930.

NANAGAS JUAN C. — *A comparison of the growth of the body dimensions of anencephalis human fetuses with normal fetal growth as determined by graphic analysis and empirical formule.* The Human Journal of Anatomy, Vol. 35, N. 3, 1925.

NETHERLANDS EAST INDIAS. — *Moral and material progress and condition of India during the years* 1920, 1921, 1922-1923, 1923-24, 1924-25, 1925-26, 1927-28. Vol. 8.

ID. — *Papers regarding the famine.* Vol. I, II.

ID. — *Preliminary results of the census of the* 1930 *in the Netherlands East Indias ; Part I : Java and Madura ; Part II. Outer Provinces.*

ID. — *The balance of the international payments of the Netherlands East Indies over the years* 1925 *to* 1929 *inclusive.*

NEWCOMER E. J. — *Biology of the European red mite in the Pacific Northwest.* Washington, 1929.

NEW YORK STATE. — *Labor Law.* July, 1930.

ID. — *Workmen's compensation law and industrial board rules.* 1930.

NEYMAN J. — *Contribution to the theory of certain test criteria.* Varsavia, 1929.

NICOLAI G. F. — *The biology of war.* London, 1919.

NITTI FRANCESCO. — *The decadence of Europe.* London, 1922.

ID. — *They make a desert.* London, 1924.

NIXON CARWER THOMAS. — *The present economic revolution in the United States.* Boston, 1926.

OBRESKOVE V. and A. M. BANTA. — *A study of the rate of oxigen consumption of different cadocera clones derived originally from a single mother.* « Physiological Zoology » January 1930, N. 1.

ORR J. B. — *Jodine supply and the incidence of endemic goitre.* Medical Research Council 1931.

ORR J. B. and GILKS J. L. — *Studies of nutrition.* Medical Research Council 1931.

PALESTINE DEPARTMENT OF HEALTH. — *Annual Report for the year* 1929.

PAPERS PRESENTED TO THE OHIO CONVERENCE OF STATISTICIANS. April 1930.

PATTERN SIMON N. — *The theory of social force.* « Annals of the American Academy of Political and social science », Vol. II, N. 1, 1896.

PEARL RAYMOND. — *The logistic curve and the centres count of* 1930.

PEARSON KARL. — *Mendelism and the problem of mental defect.* London, 1914.

ID. — *Social problems; their treatment, past, present, and future.* London, 1912.

ID. — *The groundwork of Eugenics.* London, 1909.

ID. — *The problem of practical eugenics.* London 1909.

ID. — *The scope and importance of the state of the science of national Eugenics.* London, 1909.

PEASE J. G. — *Astronomical telescopes.* Smithsonian Report for 1928.

PEEBLES ALLON. — *A survey on statistical data on medical facilities in the United States.* Washington, 1930.

ID. — *A survey of the medical facilities of Shelby county Indiana:* 1929. Washington, 1930.

ID. — *Periodicals and serials covered by social science abstracts.* December, 1929.

PEIXOTTO FESSICA. — *Cost of living studies. How workers spend a living wage.* Berkeley, 1929.

PIGOU A. C. — *Unemployment*. London, 1913.
POLAND. — *Concise statistical year book of Poland*. First year, 1930.
POPONOE PAUL. — *A statistical study of the patients of a psychiatrist in private practice*. « American Journal of psychiatry », Vol. X, N. 1, july 1930.
ID. — *How can colleges prepare their students for marriage and parenthood ?* Journal of Home Economics, Vol. 22, n. 3, 1930.
PRINCETOWN UNIVERSITY. — *The Official Register. Report of the President for the year* 1927, 1928, 1929, 1930.
QUINSENBERRY KARL S. — *Inheritance of winder hardiness growth habit etc.* U. S. Dep. of Agriculture, Washington, 1931.
RAGNAR FRISCH. — *A method of decomposing an empirical series into its cyclical and progressive components.*
ID. — *Necessary and sufficient conditions regarding the form of an index-number which shall meet certain of Fisher's tests.*
ID. — *On approximation to a certain type of integrals*. Uppsala, 1929.
RAPPARD E. WILLIAM. — *The beginnings of international government*. « American Political Science Review », Vol. XXIV, N. 4, 1930.
RAY LYMAN WILBUR. — *The first three years' Work of the Committee on the cost of medical care and its plans for the future*. Washington, 1930.
REGISTER GENERAL'S — *Statistical Review of England and Wales*. 1929.
REMINGTON KELLOGG. — *What is known of the migrations of some of the whalebone wales*. — « Smithsonian Report for 1928 ».
REPORT OF THE COMMITTEE ON NATIONAL DEBT AND TAXATION. London, 1927.
REPORT ON VOLUME OF WATER BORNE FOREIGN COMMERCE OF THE UNITED STATES BY REPORTS OF ORIGIN AND DESTINATION. 1929.
RIVERS W.H.R. — *Observations on the senses of the todas*. « Journal of Psychology », Vol. I, part 4, December 1905.
ROBERTS GEORGE E. — *The gold movement and its effect on business*.
ROBERTSON GRANT and G. BARTOLOMEW. — *An historical atlas of modern Europe from* 1789 *to* 1914.
ROJANSKY VLADIMIR. — *Note on the calculation of standard deviations* « The American Mathematical Monthly », Vol. XXXV, N. 3, 1928.
ROSCOE WILLIAM. — *Considerations on the causes, objects and consequences of the present war*. London, 1808.
ROSWELL H. JOHNSON. — *Legislation*. « Eugenics », Vol. III, N. 3, 1930.
RUDMOSE R. N. — *Some problems of Polar Geography*. « Smithsonian Report for 1928 ».
RUFUS ROREM C. — *Capital investment in hospitals*. Washington, 1930.
ID. — *Private Group Clinics*. Washington 1930.
ID. — *Replacement cost in accounting valuation*..
RUGGLES GATES. — *Aspects of physical and mental Inheritance*. « Nature », November 1926.
SANDERS M. J. — *Comparative birth-rate movements among European nations*. « Eugenics Research Association », September 1929.
SCAMMON R. E. and HALBERT DUNN. — *On the growth of the human cerebellum in early life*. 1924.
SCAMMON R. E. and LEROY A. CALKINS. — *The relation between the body-weight and age of the human fetus*.

SCAMMON R. E. and G. H. SCOTT. — *The technique of determining irregular areas in morphological studies.* « The anatomical Record », Vol. 35, N. 3.

SCAMMON R. E. and JOHN A. KLITTLESON. — *The growth of the gastro-intestinal tract of the human fetus.* 1927.

SCAMMON R. E. and L. A. CALKINS. — *Simple empirical formulae for expressing the lineal growth of the human fetus.* 1923.

SCAMMON R. E. and ALBERT KLEIN. — *Surface area and age in prenatal life.* 1930.

SCAMMON R. E. — *Studies on the growth and structure of the infant thorax.* « Radiology », August 1927.

ID. — *The first seriation study of human growth.* « American Journal of Physical Antropology », Vol. X, N. 3, 1927.

ID. — *On the weight increments of premature infants as compared with those of fetures of the same gestation age and those of fulltermchildren.* 1927.

ID. — *The growth in mass of the various of the body in the fetal period.* 1927.

ID. — *The literature on the growth and physical development of the fetus, infant, and child: a quantitative summary.* « The Anatomical Record », Vol. 35, N. 3, 1927.

ID. — *The prenatal growth and natal involution of the human suprarenal gland.* 1926.

ID. — *The prenatal growth and natal involution of the human uterus.* Proceedings of the Society for experimental biology and Medicine, 1926.

ID. — *The prenatal growth of the human pancreas.* 1927.

SCHAEFER JOHN H. — *The normal weight of the pancreas in the adult human being: a biometric study.*

SCHUCHERT CHARLES. — *The hypotesis of continental displacement.* « Smithsonian Report for 1928 ».

SCHULTZ HENRY. — *The standard error of a forecast from a curve.* « American Statistical Association », July 1930.

SCHUSTER E. and ELDERTON ETHEL. — *The inheritance of ability.* « Eugenics Laboratory Memoirs ». London, 1907.

SCOTT H. GORDON. — *Growth of crypts and glands of the human stomach.*

ID. — *Tubercolosis in man and lower animals.* London, 1930.

SEARES FREDERICK H. — *Counting the stars and some conclusions.* « Smithsonian Report 1929 ».

DELIGMAN EDWIN R. A. and BAKER THOMAS MOON. — *Wealth and taxation.* « Proceedings of the Academy of Political Science », Vol. XI, May 1924, N. 1.

SETON-WATDON DOVER W., ZIMMERN and GREENWOOD. *The war and democracy.* London, 1914.

SHARPE F. R. and LOTKA. — *A problem in Age-Distribution.* « Philosophical Magazine », April 1911.

SHIMOJO Y. — *Outline of the recent statistical works in Japan.* Tokio, 1930.

SIDNEY BEATRIX WEBB. — *Industrial democracy.* London, 1897.

ID. — *The discovery of the consumer.* Manchester, 1928.

SIPOS ALEXANDER. — *Practical application of jordan's method for trend measurement.* Budapest, 1930.

SMITH ELLIOT G. — *Human Nature.* Conway Memorial Lecture.

SMITH ADAM. — *The nature and causes of the wealth of nations.* Edinburg 1863.
SNIDER C. — *How this country helped to bring on a world-wide depression.* June 24, 1930.
ID. — *Must we have a business recession ?* May 20, 1930.
ID. — *New Measures in the equation of exchange.* « American Economic Review », Vol. XIV, N. 4.
ID. — *New Measures of the relations of credit and trade.* New York, 1930.
ID. — *The future of business cycles.* « Federal Reserve Bank », New York City, 1930.
ID. — *The influence of the interest rate on the business cycle.* « American Economic Review », Vol. XV, N. 4 December 1925.
ID. — *The problem of prosperity.* « Journal of the American Statistical Association », March 1929.
SNODGRASS R. E. — *How insects fly.* Washington, 1930.
SOROKIN A. PITIRIM, with MANIE TANQUIST and OTHERS. — *An experimental study of efficiency of work under various specified conditions.* « The American Journal of Sociology », Vol. XXXV, N. 5.
SOUTHERNS L. — *Physical Economics. An essay on foundamental principles.*
SPARHAWK N., WILLIAM and WARREN D. BRUSCH. — *The economic aspects of forest destruction in northern Michigan.* January 1929.
STANLEY REDGROVE H. — *Synthetic Perfumes.* Washington, 1930.
STATISTICAL ABSTRACTS FOR TOKYO, 1928, Vol. I, 1930.
STATISTICAL ABSTRACTS FOR THE NETHERLANDS EAST INDIES. Seventh number, year 1929.
STATISTICAL REVIEW OF ENGLAND AND WALES, 1928.
STEARNS HAROLD. — *The « craters of the moon » in Idaho.* « Smithsonian Report for 1928 ».
STEFFENSEN F. F. — *Some recent researches in the theory of statistics and actuarial science.* Cambridge, 1930.
STEVENS MAY IDA. — *An analysis of 3.122 diphteria case histories.* March 1931.
STUART CHAPIN F. — *Cultural Change.* London, 1928.
ID. — *Scale for rating living room equipement.* January, 1930.
SUN-YAT-SEN. — *His life and achievements.* Shangai Mercury.
SUVIRANTE BR. — *Finland and the world depression.* Helsinki, 1931.
ID. — *The theory of the balance of trade in England.* Helsingfors, 1923.
SWANN J. G. — *Three centuries of natural philosophy.* « Smithsonian Report for 1928 ».
TAUSSIG F. W. — *Principles of Economics.* New York, 1912.
TAYLOR PAUL S. — *Mexican Labor in the United States.* Berkeley, 1930.
ID. — *The physiology of the ductiless glands.* « Smithsonian Report 1928 ».
THE DECLINE AND FALL OF THE BRITISH EMPIRE. — Oxford, 1905.
THE SURANYI UNGER. — *Recent developments in American Economic Policy.* Budapest, 1930.
TIMOSHENKO VLADIMIR. — *The role of agricultural fluctuations in the business cycle.* — University of Michigan, 1930.
ID. — *Wheat prices and the world wheat market.* Ithaca, 1927.

TODD WINGATE T. — *Anthropology and negro slavery.* « Medical life », March 1929.
ID. — *Dimensions of the body : whites and american negroes of both sexes.* « American Journal of Physical Anthropology », Vol. XI, N. 1, 1928.
ID. — *Entrenched negro physical features.* « Human biology ». January 1929.
ID. — *Skin Pigmentation.* « American Journal ot Physical Anthropology », Vol. XI, N. 2, 1928.
TOLMACHOFF I. P. — *Extension and extermination.* Washington, 1930.
TRYON F. G. — *Relative rate of growth of coal, oil, and water power.*
TRYON and ROGERS. — *Statistics of bituminous coal preparation.* Washington, 1930.
TUCKER ROBERT H. — *Our unstable standard of value.* Washington, 1929.
THE UNITED CHARITIES OF SAINT PAUL, MINNESOTA. September 1, 1928.
UNITED STATES BUREAU OF RESEARCH. — *Report on volume of water born foreign commerce of the United States by ports of origin and destination.* 1928.
UNITED STATES DEPARTMENT OF AGRICULTURE. — *Profits from farm woods.* 1930.
ID. — *Yearbook of Agriculture.* 1930.
ID. — *Id.* 1931.
UNITED STATES DEPARTMENT OF COMMERCE. — *Alphabetical Index of occupations.* Washington, 1930.
ID. — *Biennal Census of manufactures* 1927.
ID. — *Birth, stilbirth and infant mortality.* 1927, part I.
ID. — *Id.* 1928.
ID. — *Business cycles and unemployment.* Washington 1923.
ID. — *Census of Electrical Industries.* 1) *Telegraphs,* 1927, 2) *Telephones,* 1927.
ID. — *Census of manufactures,* 1927 Vols. 4.
ID. — *Id. Numerical Code.*
ID. — *Census of Population,* 1931.
ID. — *Coal in* 1928.
ID. — *Coding Instructions for the unemployment schedule.* Washington, 1930.
ID. — *Commerce Yearbook,* 1930, Vol. I, II,
ID. — *Cotton production in the U. S. Crop of* 1929. Washington, 1930.
ID. — *Financial statistics of cities having a population of over* 30.000. 1927.
ID. — Id. in 1928.
ID. — *Financial statistics of States,* 1924.
ID. — Id., 1928.
ID. — *Lumber, bath and shingles.* 1930.
ID. — *Manual of joint causes of death.* 1925.
ID. — *Marriage and divorce.* Year 1922, 1923, 1924, 1925, 1926, 1928, Vol. 5.
ID. — *Mental patients in state hospitals* 1926 *and* 1927.
ID. — *Mortality statistics* 1927, part I, II.
ID. — Id., 1928.
ID. — *Population* 1930.
ID. — *Prisoners in State and Federal prisons and reformatories,* 1926.
ID. — *The prisoners' antecedents.*
ID. — *Religious Bodies,* 1926.

UNITED STATES DEPARTMENT OF COMMERCE. — *Statistical Abstract of the United States*, 1929.
ID. — Id., 1930.
ID. — *Statistics for cities*, 1929.
ID. — *Statistics for industries and States*, 1927.
ID. — *The balance of international payments of the United States in* 1929.
ID. — *United States Census of Agriculture* 1925, part I and II.
ID. — *Women in gainful occupation*. 1870 to 1920.
UNITED STATES DEPARTMENT OF LABOR. — *Handbook of Labor Statistics*, 1924-1926.
UNIVERSITY OF MINNESOTA. — *Announcement of training course of social and civic world and department of Sociology*. 1928-29.
ID. — *The College of science, literature and the arts*. Part I.
ID. — *Announcement of courses for the years* 1929-31.
ID. — *The graduate school. Announcement for the years* 1929-1931.
ID. — *Fifty-eight Annual commencement*. 1930.
ID. — *General information for the year* 1929-1930.
VARLEZ L. — *Seasonal fluctuations in migration*. « International Labour Office », Geneva, 1928.
VERNON M. D. — *The movements of the Eyes in reading*. « Medical Research Council ». London, 1930.
VRUWINK JOHN and PAUL POPONOE. — *Postoperative changes in the libido following sterilization*, Vol. XIX, N. I, 1920.
WALFORD E. M. A. — *The county-families of the United Kingdom*.
WALKER JAMES. — *Svante Arrehnius*. « Smithsonian report for 1928 ».
WALLIS WILSON D. — *Culture and progress*. New York, 1930.
WALLIS D. WILSON and MALCOLM M. WILLEY. — *Readings in Sociology*. New York, 1930.
WALLIS D. WILSON. — *Some phases of the psychology of prejudice*. « Journal of abnormal and social psychology », Vol. XXIV, N. 4.
ID. — *The prejudices of men*. « The American Journal of Sociology », Vol. XXXIV, N. 5, 1929.
WALSH. — *Bimetallism and monometallism*. Dublin, 1893.
WATKINS CHARLES H. — *The growth of the asterial system in the human fetus*. 1927.
WEBB SIDNEY. — *Socialism and individualism*. London, 1908.
WELLS H. G. — *Socialism and the family*. London, 1906.
WETMORE ALEXANDER. *Birds of the past in North America*. « Smithsonian Report, 1928 ».
WHITE FRANK. — *Posterity in the light of science, philanthropy and population*. London, 1929.
WICKSELL S. D. — *Remarks on regression*. 1930.
WIGGLESWORTH F. — *Gold and stability*. 1928, New York.
WILKES GORDON B. — *Artificial cold*. Washington, 1930.
WILKINS G. — *The rise and progress of poverty in England from the Norman Conquest to modern times*. London, 1930.
WILLCOX WALTER. — *International Migrations Vol. II*. New York, 1931.

WILLCOX WALTER. — *The probable increase of the negro race in the United States.* Cornell University, 1905.
WISHART JOHN. — *The analysis of variance illustrated in its application to a complex agricultural experiment on sugar beet* Berlin, 1930.
ID. — *The derivation of certain high order sampling product moments from a normal population.* Cambridge 1930.
ID. — *The influence of rainfall on the yield of Barley of Rothamsted.* Cambridge, 1930.
ID. — *On the secular variation of rainfall of Rothamsted.* London, 1930.
WOO T. L. — *On the assymetry of the manskull.* « Biometrika », May 1931.
ID. — *Tables for axertaining the significance of association measured by the correlation ratio.* « The biometric Laboratory. University College ». London.
WOOLLEY LEONARD C. — *Ur of the Chaldees More Royal Tombs.* Washington, 1930.
WRIGHT PHILIP G. — *Moore's Synthetic Economics.* The Journal of Political Economy, Vol. XXXVIII, N. 3, giugno, 1930.
YEAR BOOK. — *Bank of Finland.* 1930.
YEARLY REPORT OF HAADASSAH MEDICAL ORGANIZATION FOR THE YEAR 1928.
YOUNG OWEN D. — *The movement for a sounder money.*
ZABIELLO G. — *Concentrations of statistical services in Italy.* « The American Statistical Association ». 1930.
ZIMMERMAN and D. BLACK. — *Factors affecting expenditures of farm family incomes in Minnesota.* Minnesota Bulletin, July 1928.
ZIMMERMAN CHARLES. — *Incomes and expenditures of Minnesota farm and city families.* 1927-1928. Minnesota Bulletin 255.
ID. — *Incomes and expenditures of village and town families in Minnesota.* March 1929.
ID. — *Report on Committee on stabilization of the money standard.*
ANDERSON OSKAR. — *Die Korrelationsrechnung in der Konjunkturforschung.* Bonn, 1929.
ID. — *Ist die Quantitätstheorie statistich nachweisbar ?* Wien, 1931.
ALTSCHUL EUGEN. — *Die Mafthematik in der Wirtschatsdynamik.* Tübingen 1930.
BERCZELLER L. — *Der mathematische und biologische Collectivbegriff.*
ID. — *Die Bedeutung der Soja für die Volksernährung.* Budapest 1926.
ID. — *Statistisches über die Wissenschaftliche Produktivität.*
ID. — *Ueber die Reichengesetze II. Kriminalität und Taglohn.*
ID. — *Mortalität und Wohnungsverhaltnisse* (für Wien).
ID. — *Ueber Korrelation I, II, IV.*
ID. — *Zur Statistik des Wissenschaften und Gelehrten.*
BERNSTEIN FELIX. — *Beiträge zur mendelistischen Anthropologie II.*
ID. — *Deutsche Spar-Prämien-Unleihe.* 1919.
ID. — *Die Konstruktionsmotive der Sparprämienanleihe von* 1918.
ID. — *Die Theorie der gleichsinniger Faktoren in der Mendelschen Erblichkeitslehre vom Standpunkt der mathematischen Statistik.* Berlin, 1922.
ID. — *Die Theorien des Crossin-over vom statistischen Standpunkt.* Berlino, 1927.
ID. — *Die Zukunft der Rentenversicherung das Versicherungsarchiv.* 1930.
ID. — *Ueber den mittleren Fehler der Potenzmomente.* Göttingen.

Bernstein Felix. — *Ueber die Ermittlung und Prüfung von Gen-Hypothesen aus Vererbungsbeobachtungen an Menschen und über die Unzulässigkeit der Weinberg'schen Geschwistermethode als Korrektur der Auslesewirkung.* München, 1929.

Id. — *Über mendelistische Anthropologie.* Berlin, 1927.

Bohac Ant. — *Prof. Dr. Heinrich Rauchberg.* Praga, 1930.

Breisky Walter. — *Die Weltlage des Statistik.* Wien 1930.

Bresciani Turroni Costantino. — *Über die Elastizität des Verbrauchs ägyptischer Baumwolle.* Jena, 1931.

Brüschweiler Carl. — *Einkommensverhältnisse Kaufmännischer Angestellter in der Schweiz* 1928.

Bürgdorfer F. — *Die wanderungen über die trockenen Landsgrenzen.*

Id. — *Die Wanderungen über die Deutschen Reichsgreuzen im letzten Jahrhundert.* Berlin, 1931.

Id. — *Familie und Volk.* Dresden, 1930.

Id. — *Eugenische Tagung in Rom.*

Id — *Ursachen der Auswanderung und besonderen Einfluss der wirtschaftlichen Lage auf die Auswanderung.*

Danaïlow G. T.— *Umtersuchungen über die Bevölkerungstatistik Bulgariens* 1931.

Id. — *Einleitende Bemerkungen zu der am 23 März 1928 zusammentretenden Konferenz der Vertreter der mitteleuropäischen Konjunkturforschungs-Institute.*

Ferenczi Imre. — *Kontinentale Wanderungen und die Annäherung der Völker.* Jena, 1930.

Fischer Eugen. — *Aus der Geschichtender Deutschen Gesellschaft für Rassenhygieme.* « Archiv für Rassen und Gesellschaftsbiologie ».

Freudenberg Karl. — *Die statistischen Methoden.* Berlin, 1930.

Glogowski Arnold. — *Beiträge zur Auffindung verborgener Periodizitäten* Münster, 1929.

Goldscheid Rudolf. — *Denkschrift über errichtendes Forschungsinstitut für Menschenökonomie,* 1928.

Göpfert Christian. — *Über das Körperwachstum zürcherischer Volksschüler.* Zürich 1930.

Gumbel J. — *Wie kann die Sterbetafel durch einen Koeffizienten charakterisiert werden ?*

Harms Bernhard. — *Das Institut für Weltwirtschaft und Seeverkehr an der Universität Kiel.* Kiel 1930.

Harting Gustaw. — *Eine funktional-statistische Analyse des Baumwollpreises während der Jahre* 1892 *bis* 1913.

Holzinger Ernst. — *Beiträge zur anthropologischen Statistik Mendeluder Merkmale.* Göttingen, 1927.

Industrielle Produktion. — *Statistischen Reichsamt.* Jahre 1930.

Jakowenko E. — *Über die Nomenklatur und Klassifikation der Todes- und Krankheitsursachen.* « Archiv für soziale Hygiene und Demographie ». Band V, Heft 1, 1929.

Koch Hans. — *Die Ewaldsche Hortheorie.* Leipzig, 1928.

Kuczynski. — *Die Konjunktur für den Arbeiter.* Berlino, 1930.

Id. — *Sterbende Völker.* « Finanzpolitische Korrespondenz », Jahrgang IX, N. 31-32, August 1928.

KUHN WALTER. — *Bevölkerungsstatistik des Deutschturms in Galizien.* Wien, 1930.
KUNWALD GOTTFRIED. — *Ehrliches und mehrliches Silbergeld.* Jena 1931.
LAGUNOFF B. — *Über eine Erweiterung der Gleichungen des elektromagnetischen Feldes.* Berlin, 1930.
LOEFFLER LOTHAR. — *Rontgenschädigungen der männlichen Keimzelle und Nachkommenschaft.* Wien, 1929.
LORENZ JAKOB. — *Soziale Aktivierung des Thomismus.* 1930.
MANN KARL FRITZ. — *Die Staats wirtschaft unserer zeit.* Jena, 1930.
MJOËN J. A. — *Alkoholprobleme im Lichte biologischer Erkenntnisse.* Berlin, 1928.
ID. — *Die Bedeutung der Kollateralen für den Begabungsgrad der Kinder*
MORGENSTERN OSKAR. — *Qualitative und quantitative Konjunkturforschung.* Wien 1928.
MUCKERMANN HERMANN. — *Neue Forschungen über das Problem der differenzierten Volksvermehrung.* Zeitschrift für induktive Abstammungs- und Vererbungslehere, Band LIV. 1930.
ID. — *Wesen der Eugenik und Aufgaben der Gegenwart,* 1929.
MULLER, LYER F. — *Formen der Ehe.* München 1911.
NIEUWENHUIS A. W. — *Die Anfangsformen der Naturwissenschaften in Ozeanien.* « Janus » 35ème année 1931.
ID. — *Die Entstehung der Polynesier und ihre Kultur,* 1929.
NIGGLI-HURILIMANN BERTHA. — *Anthropologische Untersuchungen in Zürcher Kindergarten mit Berücksichtigung der sozialen Schichtung.*
OTTOLENGHI COSTANTINO. — *Ein Vorläufer der Wirtschaftssemiotik im 17. Jahrhundert.* Tübingen, 1930.
PALLA EDMUND. — *Probleme der Sozialstatistik* « Wiener Statistische Sprechabende 1930 Heft 2 ».
PERNAMBUCO. — *Ökonomie und Finanz des Staates Pernambuco.* 1930.
PETER HANS — *Grenzen der Statistik in der Konjunkturforschung.* Bonn, 1930.
FRISCH RAGNAR. — *Der Einfluss von Veränderungen des Preisniveans auf den Grenznutzen des Geldes.*
REICHEL HEINRICH. — *Ueber das Rechnen mit Vielheiten (Kollektivmasslehere) in der Biologie und über den mittleren Fehler des Korrelationskoeffizienten.* München, 1930.
RIEMER RUDOLF. — *Die rechtlichen und methodischen Grundlagen der österreichischen Betriebszählung* 1930.
ROESLE D. — *Ausbacher Familienforschung,* 1930.
ROESLE EUGEN. — *Beiträge zur Geschichte des Ausbacher-Schwalischen Geschlechts und anderer Geschlechter.*
ID. — *Ein neues Handbuch der medezinischen Statistik.* Leipzig 1930.
ID. — *Die Verbreitung der Tuberkulose in Südamerika.* Leipzig, 1929.
ROESLE E. — *Die klassifikation der Geisteskrankheiten für statistische Zwecke.* Berlin, 1929.
ID. — *Eine Statistik über 999 Morbiditätsursachen.* 1929.
ID. — *Die neuen internationalen Listen der Todesursachen für das Jahrzehnt.* 1931-1930.
SCHÄFLE ULBERT. — *Bau und Leben des Sozialen Körpers.* Tübingen, 1881.
SCHALLMAYER W. — *Eugenik, Lebenshaltung und Auslese.* Leipzig, 1908.

SCHLAGINHAUFEN OTTO. — *Das Skelett des Jahannes Selumer.* August 1930.
ID. — *Dr. Med. Adolf Barth* (1872-1930). Zürich, 1929.
SMULEWITSCH B. — *Die Lage und Entwicklungsmöglichkeiten der Statistik der Sozialen Gesundheit in der U.R.S.S. und die internationalen Aufgaben auf diesem Gebiete.* « Archiv für Soziale Hygiene und Demographie », Band IV, Heft 5, 1929.
SOMBART WERNER. — *Nationalökonomie und Soziologie.* Jena, 1930.
SOUDEK JOSEF. — *Die Sozialen Auswirkungen der Konjunkturschwankungen.* Bonn, 1929.
STAEHLE HANS. — *Die Analyse von Nachfragekurven in ihrer Bedeutung für die Konjunkturforschung.* Bonn, 1930.
ID. — *Die Statistische Analyse von Angebot und Nachfrage und die Klausel « ceteris paribus ».* Jena, 1930.
STATISTISCHES HANDBUCH. — *XI Jahrgang.* Wien, 1930.
STATISTISCHES JAHRBUCH FÜR DAS DEUTSCHES REICH. 1930.
STATISTISCHES JAHRBUCH FÜR DEN FREISTAAT SACHSEN. 1930.
STATISTISCHES JAHRBUCH FÜR DEN FREISTAAT PREUSSEN. Berlin, 1930.
VERSCHUER O. R. — *Erbpsychologie Untersuchungen an Zwillingen.* 1930.
ID. — *Intellektuelle Entwicklung und Vererbung.*
ID. — *Vom Umfang der erblichen Belastung im deutschen Volke.* München, 1930.
WALLIS D. WILSON. — *Der Einfluss der Geistesform auf Methode und Theorie.*
WEISS H. — *Denkschrift für die Verwendung von Sojamehl für die Ernährung der Arbeitslosen in Deutschland.*
ID. — *Die künftige Rolle der Sojabohne in der C.S.R.*
ID. — *Konkrete Vorschläge zur Ernährung des Militärs in der C.S.R.*
ID. — *Staatliche Massnahmen zur Einführung des Berczellerchen Sojamehls und des Anbaues der Sojabohne in der Tschechoslovakischen Republik.*
WICKSELL S. D. — *Individens fruktsamhet och Släktets Förökmüg.* Uppsala, 1930.
WINKLER WILHELM. — *Bevölkerungspolitische Forderungen an die österreichische Volkszählung von* 1930.
ID. — *Das Institut für Statistik der Universität Wien.*
ID. — *Lügt die Statistik ?* Jena, 1929.
ID. — *Neuere Zahlen zur Statistik der Sudetendeutschen.*
WIRTSCHAFTLICHE UND SOZIALE LAGE DER ANGESTELLTEN. 1931.
ZAHN FRIEDRICH. — *Das Internationale Statistische Institut.* Tagung in Warschau 1929.
ZIZEK FRANZ. — *Der Begriff der « Gleichartigkeit » in des Statistik.* « Allgemeines Statistisches Archiv », 1930.
AKERMAN JOHAN. — *Om det Ekonomika livets Rytmik.* Stockolm 1928.
ANUARIO DEMOGRAPHICO. — *Estado de São Paulo de Brasil.* 1928.
ANUARIO ESTADISTICO. — *Año* 1928. Republica de Costa Rica. San Josè, 1930.
ANUARIO ESTADISTICO DE LA REPUBLICA ORIENTAL DEL URUGUAY. — Tomo XXXVI parte 4 de Anuario Año 1927.
ANUARIO ESTADISTICO DE LA REPUBLICA ORIENTAL DEL URUGUAY, *Año* 1928.
ANUARUL STATISTIC AL ROMANIEI. 1929.
ARCHIVOS DE HYGIENE. — *Rio de Janeiro. Anno IV N° 1.* 1930.
ARQUIVO DE ANATOMIA E ANTROPOLOGIA. — Universidade de Lisboa, Vol. XIII, 1929.

AZNAR SEVERINO. — *Despoblación y colonización.* Buenos Aires, 1929.
ID. — *La funcion social de la religion.* Barcelona, 1930.
BAIOCCO PEDRO J. — *Instituto de Economía Bancaria.* Buenos Aires.
BANCO DE LA NACIÓN ARGENTINA. — *Memoria y Balance General del Ejercicio* 1929.
JUAN DE BOJORQUEZ. — *Censos de* 1930. *Introducción a la memoria.* Mexico 1930.
BRASIL. — *Annaes do quinto Congresso Brasileiro de Hygiene.* 1930.
DELFINO VICTOR. — *El certificado de sanidad para conyuges.* Buenos Aires.
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICAS SANITARIAS DE LA DIRECCIÓN GENERAL DE SANIDAD. — *La mortalidad en España durante* 1929.
DE SOUZA DANTAS MARIO. — *Relatorio Anno* 1929. Bahia 1930.
DIRECCIÓN GENERAL DE ESTADÍSTICA. — *República del Uruguay. Sintesis Estadística.* Montevideo, 1929.
FERREIRA BARBOSA. — *Informaçoes estatisticas.* Bahia. Brasil, 1929.
ID. — *O estado de Bahia.* 1931.
FLAX EDMONDO. — *La estabilización de la moneda Argentina.* Buenos Aires, 1930.
GIL ENRIQUE. — *Represión de la especulación y trust.* Buenos Aires, 1929.
INSTITUTO DE ECONOMÍA BANCARIA. — *Analisis estadístico y económico de algunas series bancarias y afines en el período* 1901 *a* 1927. Buenos Aires, 1929.
BRYN HALFDAN. — *Homo Caesius.* Nidaros, 1930.
ILLYEFALVI I. LAGOS. — *A munkasok szocialis es gazdasayi viszonyai Budapesten.* Budapest, 1930.
JAARCIJFERS WOOR NEDERLAND 1929.
JENSEN ADOLPH. — *Laan til tjanestemaznd.* Kobenhaw. Jorgensen, 1930.
KUCZYNSKI JÜRGEN. — *Grosshandelspreisentwicklung* 1928-1930. Berlino, 1930.
ID. — *Lohnanteil an Produktionskosto.*
MAGNUS DEGERBOL. — *Om tandskiftets forløb hos Københawnske Kommuneskoleb ørn.* Kopenhagen, 1931.
MANCINI TOMMASO. — *Los economistas y la crisis mundial.* Buenos Aires, 1931.
MARSCHAK JAKOB. — *Elastizität der Nachfrage.* Tübingen, 1931.
MEXICO. — *Departamento de la Estadística Nacional. Primer censo de edificios de los Estados Unidos Mexicanos.* Mexico, 1930.
NORGES OFFICIELLE STATISTIK. — *Annuaire statistique de la Norvège,* 1930.
ID — *Annuaire des chemins de fer norvégiens.* 1928-29 *et* 1929-30.
ID. — *Aperçu préliminaire des résultats du récensement au* 1^er^ *décembre* 1930.
ID. — *Assurances contre les accidents des marins.* 1930.
ID. — *Assurance contre les accidents pour les travailleurs de l'industrie.* 1930.
ID. — *Assurances contre les accidents pour les travailleur de l'industrie.* Oslo, 1931.
ID. — *Ecoles professionnelles.* 1926-27, 1928-29.
ID. — *Entremise publique. Conventions collectives et conflits du travail en* 1929.
ID. — *Norges Kommunale-Financer.* Oslo, 1930.
ID. — *Finances et communes pendant l'année* 1927-28.
ID. — *Faillites, saisies-exécutions, etc. pendant les années* 1887-1929.
ID. — *Finances de l'Etat pour les exercices* 1913-14-1931-32.
ID. — *Gages et salaires.* 1929 *et* 1930.

NORGES OFFICIELLE STATISTIK. — *Grandes pêches maritimes*, 1928.
ID. — *Récensement du 20 juin* 1929.
ID. — *L'industrie laitière de la Norvège en* 1928 *et en* 1929.
ID. — *Sociétés d'assurance*, 1928 *et* 1929.
ID. — *Statistique des hospices d'aliénés pour l'année* 1928.
ID. — *Rapport sur l'état sanitaire et médical pour l'année* 1927.
ID. — *Statistique du recrutement pour les années* 1922-26.
ID. — *Statistique de l'assistance publique pour les années* 1926 *et* 1927.
ID. — *Statistique de la navigation de la Norvège pendant l'année* 1928.
ID. — *Statistique de la navigation de la Norvège pendant l'année* 1929.
ID. — *Statistique des caisses d'épargne pour l'année* 1928.
ID. — *Statistique industrielle pour l'année* 1927.
ID. — *Service vétérinaire civil* 1928.
ID. — *Statistiques des Banques privées par actions pour l'année* 1929.
ID. — *Statistique de la criminalité pour les années* 1927-28.
ID. — *Service vétérinaire civil*, 1929.
ID. — *Statistique de la justice civile pour les années* 1928 *et* 1929.
ID. — *Statistique des industries*, Année 1928.
ID. — *Statistique de l'Office National d'assurances contre l'incendie pour les années* 1926-28.
ID. — *Statistique de l'instruction publique pour l'année* 1927-28.
ID. — *Salaires des ouvriers agricoles* 1929-30.
ID. — *Statistiques des télégraphes et des téléphones de l'Etat de Norvège pour l'année financière* 1928-1929.
ID. — *Statistique postale pour l'année* 1929.
ID. — *Statistique du commerce de la Norvège pendant l'année* 1929.
ID. — *Statistique des caisses d'épargnes pour l'année* 1929.
ID. — *Rapport sur l'état sanitaire et médical pour l'année* 1928.
ID. — *Statistique des mines et usines en Norvège en* 1929 ; *données de Svalbord pour l'année* 1928.
ID. — *Superficies agricoles et élevage du bétail de l'année* 1930.
ROSSET EDWARD. — *Proletarijat Lodzki*. Varsavia, 1930.
ID. — *Prostytucia i Choroby Weneryczne w Lodzki*. Lodz, 1931.
SASOT MIGUEL. — *Acciones de voto privilegiado*, 1930.
SECRETARÍA DE HACIENDA Y CRÉDITO PÚBLICO. *Año de* 1930. Mexico, 1930.
STATISTICK DES ONDERNEMINGEN. — *Kalendajaar* 1922. *Id.* 1920-21.
STATISTISCH-ADMINISTRATIVES JAHRBUCH DER HAUPT- UND RESIDENZSTADT. Budapest, 1930.
SVERIGE VARUINFÖRSEL FRAN OLIKA LÄUDER AR 1929.

PROF. CORRADO GINI, *Direttore responsabile.*

Roma — « L'Universale » Tipografia Poliglotta.